

ТОЧКА НА ТЕБО ЗА КРИВА НА ОЙЛЕР

Веселин Ненков Ненков

РЕЗИЮМЕ

С помощта на компютърната програма "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" е реализирано частично обобщение на една теорема на Тебо и е открита една крива от трета степен.

Ключови думи: Ойлерова права, Ойлерова крива, теорема на Тебо, точка на Тебо, THE GEOMETER'S SKETCHPAD.

Много често водени от различни съображения, математиците изразяват своето впечатление от определено математическо твърдение с думи като елегантно, хубаво, красиво и други подобни. Например К. Ф. Гаус (K. F. Gauss) (1777 – 1855) нарича една теорема в диференциалната геометрия теорема *egregium* (превъзходна), а проф. С. Гроздев в (Гроздев, 2005, с. 199) нарича едно неравенство "хубаво неравенство". Още един подобен пример е определянето на 400 задачи като най-хубавите на американското списание "AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY". Информация за това как е направен подборът на тези задачи и как са определени като "по-хубави" от останалите може да се намери в (Алексеев, 1977, с. 6 – 7) и (Grozdev, 2007, p. 157).

Кое математическо твърдение е красиво? "Трудно е, даже невъзможно да се отговори на такъв въпрос" (Grozdev, 2007, p. 157), но усещането, че една задача е красива създава условия за привличане на вниманието, предизвикване на интерес и мотивация за самостоятелни занимания с определени области на математиката. Един от начините за създаване на усещането за красота в определена задача е да се вникне в дълбочина в съдържанието ѝ чрез нейното динамично изследване. Възможност за това дават съвременните информационни технологии. Има редица статии, посветени на използването на информационните технологии в обучението по математика, като например (Гроздев, 2008), (Гроздев & Чехларова 1, 2008) и (Гроздев & Чехларова 2, 2008). Тук ще покажем как с помощта на конкретната информационна технология "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP) може да се разкрие красотата на една геометрична задача чрез търсене на обобщение.

Геометрията е изпъстрена с твърдения, които позволяват при промяна на някои от основните параметри да се получават по-обща и хубави твърдения. Има случаи, в които новото твърдение е обобщение само на част от първоначалното. Като пример за такова твърдение ще разгледаме едно любопитно частично обобщение на една теорема на френския математик Виктор Тебо (Victor Thébault) (1882 – 1960), включена във вече споменатите избрани 400 задачи на американското списание “AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY” (Алексеев, 1977). Твърдението на тази задача може да се формулира по следния начин:

Теорема на Тебо. Ако AH_a , BH_b и CH_c са височините на триъгълник ABC , то Ойлеровите прави на триъгълниците AH_bH_c , BH_cH_a и CH_aH_b се пресичат в такава точка T_0 от окръжността на деветте точки, за която една от отсечките T_0H_a , T_0H_b и T_0H_c е равна на сумата от другите две (Алексеев, 1977, с. 81, зад. 261).

Едно доказателство на теоремата на Тебо може да се намери в (Шарыгин, 1986, с. 146 – 147, зад. 168) (формулировката на задачата е на стр. 56). Тук няма да се спираме върху пълното доказателство на теоремата на Тебо, въпреки че то може да се получи от следващите резултати.

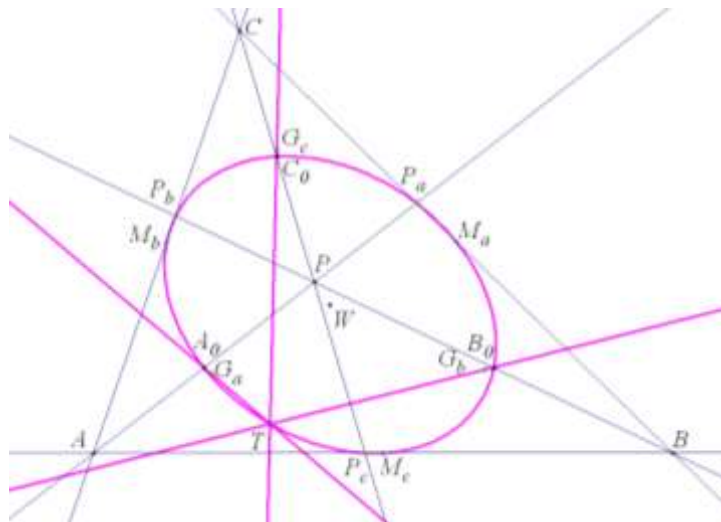
Точката T_0 , получена върху окръжността на деветте точки (Ойлеровата окръжност) по описания в теоремата на Тебо начин, можем да наричаме точка на Тебо за дадения триъгълник ABC . Като забележим някои възможности за обобщаване на разгледаните в теоремата на Тебо обекти, ще покажем как с всяка една крива от един специален клас криви от втора степен можем да свържем по една точка T на Тебо за даден триъгълник ABC . При търсене на желаните резултати, в следващите изследвания съществено ще използваме GSP.

Нека ABC е произволен триъгълник. За да открием обобщение (макар и частично) нека обърнем внимание първо на възможността за обобщаване на Ойлеровата окръжност. Тя минава през средите M_a , M_b и M_c съответно на отсечките BC , CA и AB , както и през точките H_a , H_b и H_c . Затова можем да смятаме, че е породена от чевианите на триъгълника през неговия ортоцентър H и точките M_a , M_b и M_c . От друга страна, ако P е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$, то точките M_a , M_b , M_c , $P_a = AP \cap BC$, $P_b = BP \cap CA$, $P_c = CP \cap AB$ и средите A_0 , B_0 и C_0 съответно на отсечките AP , BP и CP лежат на една крива от втора степен $\Omega(P)$, която ще наричаме *Ойлерова крива на точката P спрямо $\triangle ABC$* (Nenkov, 2007) (Фиг. 1.). Така като обобщение на Ойлеровата окръжност за $\triangle ABC$ можем да разглеждаме кривата $\Omega(P)$ при произволна точка P .

Сега да построим с GSP Ойлеровите прави на триъгълниците AP_bP_c , BP_cP_a и CP_aP_b . Установяваме, че те не се пресичат в една точка. Следователно

трябва да заменим Ойлеровите прави на триъгълниците AP_bP_c , BP_cP_a и CP_aP_b с други прави, а в частност на ортоцентър ($P \equiv H$), те да се превършат в съответните Ойлерови прави.

Ойлеровите прави на триъгълниците AH_bH_c , BH_cH_a и CH_aH_b са определени от техните медицентрове и съответните им центрове на описаните окръжности. Да забележим, че центровете на описаните окръжности за тези триъгълници са съответно средите на отсечките AH , BH и CH . Затова центровете на описаните окръжности да заменим при произволна точка P съответно с точките A_0 , B_0 и C_0 . Сега, ако с G_a , G_b и G_c означим медицентровете съответно на AP_bP_c , BP_cP_a и CP_aP_b , то вместо Ойлерови прави ще разгледаме правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c . Експериментите с GSP този път показват, че правите A_0G_a , B_0G_b , C_0G_c при различни точки P , се пресичат в една точка от $\Omega(P)$ или са успоредни (Фиг. 1, 3.). В случай на пресичане, обаче не се получава равенство, както е в теоремата на Тебо. Затова по-нататък ще обърнем внимание само на конкурентността на разгледаните прави.



Фиг. 1

В зависимост от вида на Ойлеровата крива $\Omega(P)$, е необходимо да разгледаме два случая. Видът на $\Omega(P)$ зависи от това дали правите AP_a , BP_b и CP_c спрещат в една точка P (наричаме я крайна) или са успоредни, в който случай смятаме, че тези прави минават през безкрайна точка P .

1. Точка на Тебо за Ойлерова крива, която е елипса или хипербола. Когато правите AP_a , BP_b и CP_c спресичат в крайна точка P кривата $\Omega(P)$ е елипса или хипербола. Наблюденията с GSP ни дават основание да формулираме следната:

Теорема 1. Ако P е крайна точка от равнината на ΔABC , която е различна от медицентъра му и не лежи върху никоя от правите BC , CA и AB , то правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c се пресичат в точка T от Ойлеровата крива $\Omega(P)$ или са успоредни (Фиг. 1, 3.).

Първо да отбележим, че когато P е медицентърът на ΔABC , разглежданите прави се пресичат в една точка, но тази точка не лежи върху $\Omega(P)$ (това е елипсата, допираща се до страните на ΔABC в точките M_a , M_b и M_c), а съвпада с центъра ѝ P . Затова изключваме от разглеждане медицентъра на ΔABC .

Доказателствата на теорема 1 и следващите твърдения ще проведем, като използваме барицентрични координати с координатен триъгълник ABC , при $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ и $P(\lambda, \mu, \nu)$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$) (Паскалев & Чобанов, 1985). За разглежданите точки върху $\Omega(P)$, се получават следните координатни представяния:

$$(1) \quad P_a\left(0, \frac{\mu}{\mu+\nu}, \frac{\nu}{\mu+\nu}\right), P_b\left(\frac{\lambda}{\nu+\lambda}, 0, \frac{\nu}{\nu+\lambda}\right), P_c\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \frac{\mu}{\lambda+\mu}, 0\right),$$

$$(2) \quad A_0\left(\frac{\lambda+1}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), B_0\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu}{2}\right), C_0\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right).$$

Тъй като $\Omega(P)$ е определена от P и медицентъра на ΔABC , то от (1) и резултата в (Гроздев & Ненков, 2009) за уравнението на $\Omega(P)$ се получава

$$(3) \quad \mu\nu x^2 + \nu\lambda y^2 + \lambda\mu z^2 - (1-\lambda)\lambda yz - (1-\mu)\mu zx - (1-\nu)\nu xy = 0.$$

Освен това от (1) се получават и следните координатни представяния:

$$(4) \quad G_a\left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + \mu\nu}{3(1-\mu)(1-\nu)}, \frac{\mu}{3(1-\nu)}, \frac{\nu}{3(1-\mu)}\right), G_b\left(\frac{\lambda}{3(1-\nu)}, \frac{\mu^2 + 2\mu + \nu\lambda}{3(1-\mu)(1-\nu)}, \frac{\nu}{3(1-\lambda)}\right), \\ G_c\left(\frac{\lambda}{3(1-\mu)}, \frac{\mu}{3(1-\lambda)}, \frac{\nu^2 + 2\nu + \lambda\mu}{3(1-\lambda)(1-\mu)}\right).$$

Сега от (2) и (4) параметричните уравнения на правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c се получават в следния вид:

$$(5) \quad A_0G_a: \quad x = \frac{\lambda+1}{2} + \frac{\lambda^2 - \lambda + \mu\nu + 3\lambda\mu\nu}{(1-\mu)(1-\nu)} l_1, \quad y = \frac{\mu}{2} + \frac{(1-3\nu)\mu}{1-\nu} l_1, \\ z = \frac{\nu}{2} + \frac{(1-3\mu)\nu}{1-\mu} l_1.$$

$$(6) \quad B_0G_b: \quad \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-3\nu)\lambda}{1-\nu} l_2, \quad y = \frac{\mu+1}{2} + \frac{\mu^2 - \mu + \nu\lambda + 3\lambda\mu\nu}{(1-\nu)(1-\lambda)} l_2, \\ z &= \frac{\nu}{2} + \frac{(1-3\lambda)\nu}{1-\lambda} l_2. \end{aligned}$$

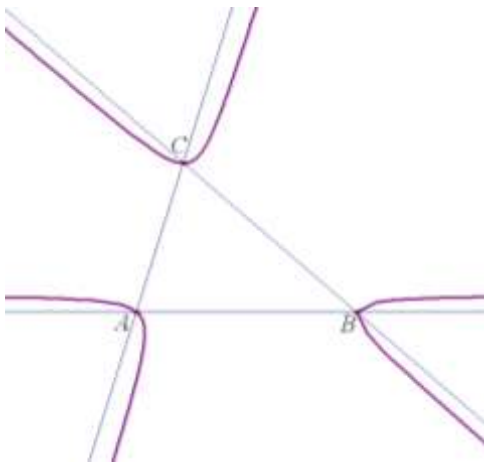
$$(7) \quad C_0G_c: \quad \begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2} + \frac{(1-3\mu)\lambda}{1-\mu} l_3, \quad y = \frac{\mu}{2} + \frac{(1-3\lambda)\mu}{1-\lambda} l_3, \\ z &= \frac{\nu+1}{2} + \frac{\nu^2 - \nu + \lambda\mu + 3\lambda\mu\nu}{(1-\lambda)(1-\mu)} l_3. \end{aligned}$$

Нека правите A_0G_a и B_0G_b се пресичат в точка T . Тогава след решаване на системата уравнения (5)–(6) се получава, че пресечната им точка T има следните координати:

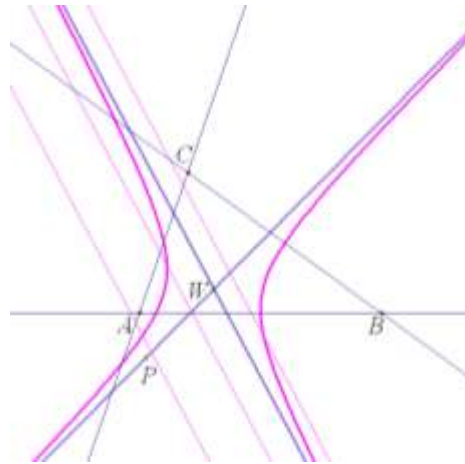
$$(8) \quad x_T = \frac{\lambda(\mu-\nu)^2}{\tau}, \quad y_T = \frac{\mu(\nu-\lambda)^2}{\tau}, \quad z_T = \frac{\nu(\lambda-\mu)^2}{\tau},$$

където $\tau = \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda - 9\lambda\mu\nu$.

След заместване на (8) в (7) лесно се установява, че T е точка и от правата C_0G_c . Освен това, като се заместят координатите (8) в (3) се установява, че $T \in \Omega(P)$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Ако правите A_0G_a и B_0G_b са успоредни, то коефициентите пред l_1 и l_2 са пропорционални. Получава се, че $\tau = 0$. Ако сега се допусне, че правите

A_0G_a и C_0G_c се пресичат, то за общата им точка, както беше установено, са изпълнени равенствата (8), които са възможни само когато $\tau \neq 0$. Следователно в този случай правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c са успоредни (Фиг. 2.). С това теорема 1 е напълно доказана. В изложеното доказателство на теорема 1 същевременно беше показано и следното:

Следствие 1. *Правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c са успоредни точно, когато точката P лежи върху кривата от трета степен*

$$(9) \quad K : xy + yz + zx - 9xyz = 0 \text{ (Фиг. 2.)}.$$

Понеже $\lambda, \mu, \nu \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup [1, +\infty)$, от геометричния смисъл на координатите λ , μ и ν (Паскалев & Чобанов, 1985) следва, че когато $P \in K$, Ойлеровата крива $\Omega(P)$, е хипербола. Построенията с GSP показват, че е изпълнено и следното:

Следствие 2. *Ако точката P е от K , то правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c са успоредни на едната асимптота, а P лежи върху другата асимптота на хиперболата $K(P)$ (Фиг. 3.).*

Първата част на следствие 2 трябваше да се очаква, тъй като тя по определен начин се съгласува с пресичането на правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c върху $\Omega(P)$. Затова първата част на следствие 2 може да се тълкува така: общата безкрайна точка на правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c лежи върху $\Omega(P)$.

Безкрайните точки на $\Omega(P)$, се определят от общите решения на системата определена от $x + y + z = 0$ и (3). Получава се хомогенното уравнение

$$(10) \quad \nu(1-\nu)y^2 + 2\mu\nu yz + \mu(1-\mu)z^2 = 0.$$

За да докажем, че правата A_0G_a е успоредна на една от асимпютите на $\Omega(P)$, трябва да покажем, че координатите на вектор колинеарен с A_0G_a са решение на (10). От (5) (коэффициентите пред l_1) и (9) (точката P е от K) се получава, че векторът $(2\mu\nu(3\lambda-1), \mu(3\nu-1)(1-\mu), \nu(3\mu-1)(1-\nu))$ е колинеарен с A_0G_a . Сега като заместим координатите на този вектор в лявата част на (10) и отчетем, че λ , μ и ν удовлетворяват (9), получаваме вярно равенство.

Центърът на $\Omega(P)$, е точката $W\left(\frac{\lambda+1}{4}, \frac{\mu+1}{4}, \frac{\nu+1}{4}\right)$ (Фиг. 3.). За да покажем, че P е точка от асимптота на $\Omega(P)$, трябва да покажем, че координатите на вектор колинеарен с правата WP са решение на (10). Един вектор колинеарен с WP е $(3\lambda-1, 3\mu-1, 3\nu-1)$. Както в предишния случай лесно се проверява, че този вектор е решение на (10).

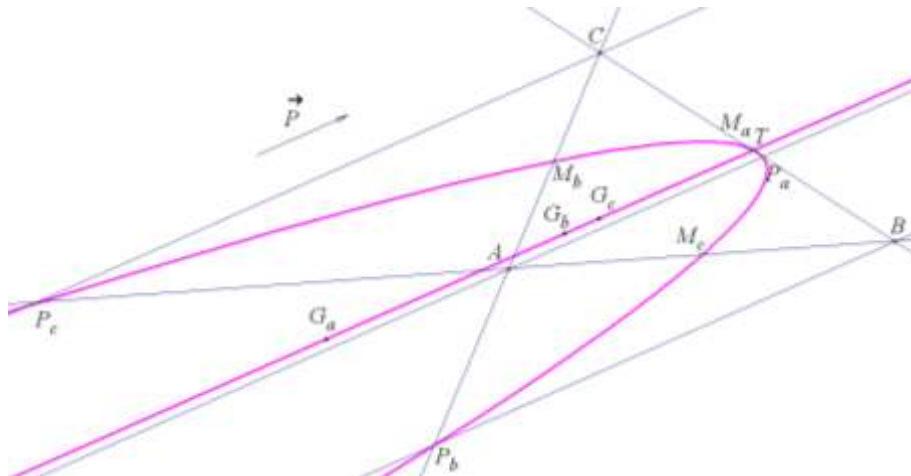
Остава да се покаже, че точката P не лежи върху същата асимптота, на която е успоредна правата A_0G_a . Ако допуснем, че това не е вярно ще се получи, че разгледаните по-рано вектори са колинеарни, т.е.

$$\frac{2\mu\nu(3\lambda-1)}{3\lambda-1} = \frac{\mu(3\nu-1)(1-\mu)}{3\mu-1} = \frac{\nu(3\mu-1)(1-\nu)}{3\nu-1}.$$

Тези равенства имат единствено решение $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, което представя медицентъра на $\triangle ABC$, който е изключен по условие. С това следствие 2 е напълно доказано.

Теорема 1 и допълващите я следствия ни дават основание да наречем общата точка (крайна или безкрайна) на правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c точка на Тебо за Ойлеровата крива $\Omega(P)$. От следствията се вижда, че точката на Тебо е безкрайна точно когато P лежи върху кривата K .

2. Точка на Тебо за Ойлерова крива, която е парабола. Когато правите AP_a , BP_b и CP_c са успоредни на направление определено от вектор \vec{P} смятаме, че тези прави минават през безкрайна точка P (Фиг. 4.). В този случай Ойлеровата крива $\Omega(P)$ е парабола (Фиг. 4.).



Фиг. 4.

Когато P е безкрайна, точките A_0 , B_0 и C_0 можем да разглеждаме като безкрайни и съвпадащи с P . Тогава за правите A_0G_a , B_0G_b и C_0G_c може да се предположи, че съвпадат, което означава, че очакваме точките G_a , G_b и

G_c да лежат на една права (Фиг. 4.). Построенията с GSP показват, че предположението е вярно. Така стигаме до следната:

Теорема 2. Ако правите AP_a , BP_b и CP_c са успоредни, то медицентровете G_a , G_b и G_c лежат на една права g (Фиг. 4.).

Ако $P(\lambda, \mu, \nu)$ е безкрайна точка, то $\lambda + \mu + \nu = 0$. Тогава от (1) и резултата в (Гроздев & Ненков, 2009), за уравнението на $\Omega(P)$ се получава

$$(11) \quad \mu\nu x^2 + \nu\lambda y^2 + \lambda\mu z^2 + \lambda^2 yz + \mu^2 zx + \nu^2 xy = 0.$$

Освен това от (1) се получават и следните координатни представяния:

$$(12) \quad G_a\left(\frac{\lambda^2}{3\mu\nu}, -\frac{\mu}{3\nu}, -\frac{\nu}{3\mu}\right), G_b\left(-\frac{\lambda}{3\nu}, \frac{\mu^2}{3\nu\lambda}, -\frac{\nu}{3\lambda}\right), G_c\left(-\frac{\lambda}{3\mu}, -\frac{\mu}{3\lambda}, \frac{\nu^2}{3\lambda\mu}\right).$$

Известно е, че точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ от равнината на ΔABC лежат на една права точно, когато е изпълнено равенството:

$$(13) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Паскалев \& Чобанов, 1985}).$$

Като се заместят координатите от (12) в (13) лесно се установява верността на теорема 2.

С уравнения в параметричен вид правата $g \equiv G_a G_b$ може да се представи така:

$$(14) \quad g: x = \frac{\lambda^2 + \mu\nu}{3\mu\nu} + \lambda t, \quad y = -\frac{\mu}{3\nu} + \mu t, \quad z = -\frac{\nu}{3\mu} + \nu t.$$

От (11) и (14) се получава, че пресечната точка T на g и $\Omega(P)$ координатно се представя по следния начин:

$$(15) \quad x_T = -\frac{(\mu - \nu)^2}{9\mu\nu}, \quad y_T = -\frac{(\nu - \lambda)^2}{9\nu\lambda}, \quad z_T = -\frac{(\lambda - \mu)^2}{9\lambda\mu}.$$

Координатите (15) имат известна прилика с координатите (8), затова точката $T = g \cap \Omega(P)$ можем да наречем *точка на Тебо за Ойлеровата парабола $\Omega(P)$* (Фиг. 4.).

По този начин върху всяка Ойлерова крива в равнината на даден триъгълник ABC се определя една точка на Тебо. В заключение ще отбележим още, че в процеса на обобщение на теоремата на Тебо забелязахме и една специална крива от трета степен, която е характерна за всеки триъгълник с описаните в следствие 2 свойства. Така с помощта на GSP и

аналогия открихме няколко красиви фрагмента от законите, описващи хармонията в геометрията на триъгълника.

ЛИТЕРАТУРА

АЛЕКСЕЕВ, В. (редактор) (Алексеев), (1977). Избранные задачи из журнала "AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY". Москва: Мир.

ГРОЗДЕВ, С. (Гроздев), (2005). Европейско кенгуру. София: СМБ.

ГРОЗДЕВ, С. (Гроздев), (2008). Методология и информационные технологии в образовании. Материалы Международного круглого стола "Современные технологии преподавания естественно-научных и гуманитарных дисциплин. София, 17 – 22.

ГРОЗДЕВ, С. & НЕНКОВ, В. (Гроздев & Ненков), (2009). Една крива от втора степен за две точки на Чева. Математика и математическо образование, 38(2009), 245-248.

ГРОЗДЕВ, С. & ЧЕХЛАРОВА, Т. (Гроздев & Чехларова 1), (2008) Българо-руският прокет по методология и приложение на информационните технологии в образованието. Научни трудове на Интердисциплинарен форум "България и Русия – посоки на взаимност". Русе, 55 – 64.

ГРОЗДЕВ, С. & ЧЕХЛАРОВА, Т. (Гроздев & Чехларова 2), (2008) Методика и информационни технологии в образованието. Сборник доклади "Руската наука, образование и култура в съвременния свят". Стара Загора, 27–35.

ПАСКАЛЕВ, Г. & ЧОБАНОВ, И. (Паскалев & Чобанов), (1985). Забележителни точки в триъгълника. София : Народна просвета.

ШАРЫГИН, И. (Шарьгин), (1986). Задачи по геометрия. Планиметрия. Москва: Наука.

NEJKOV, V. (Nenkov), (2007). Euler's Line and Euler's Curve Dependent by a Point. New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, 48.

GROZDEV, S. (Grozdev), (2007). For high achievements in mathematics. The Bulgarian experience (theory and Practice). Sofia: Association for the Development of Education.

Веселин Ненков Ненков
Технически колеж Ловеч
ул. "Съйко Съев" № 31
Ловеч
e-mail: vnenkov@mail.bg

THEBAULT'S POINT FOR EULER'S CURVE**Vesselin Nenkov Nenkov****ABSTRACT**

By the software THE GEOMETER'S SKETCHPAD is partial generalized of a Thébault's theorem and discovery a curve of third degree.

Keywords: Euler's line, Euler's curve, Thébault's theorem, Thébault's point, THE GEOMETER'S SKETCHPAD.