Научна конференция „Иновационни ИКТ в научните изследвания и обучението: математика, информатика и информационни технологии“, 29-30 ноември 2018 г., Пампорово, България
Scientific Conference “Innovative ICT in Research and Education: Mathematics, Informatics and Information Technologies”, 29-30 November 2018, Pamporovo, Bulgaria

ЯВНИ РЕШЕНИЯ НА ДВОЙНО СИНУС-ГОРДЪН СТАЦИОНАРНО УРАВНЕНИЕ, ОПИСВАЩО ДЪЛГИ ДЖОЗЕФСОНОВИ КОНТАКТИ

Павлина Атанасова, Христо Димов

Резюме: Дълбоката физическа природа на Джосефсоновите контакти се предопределя от квантовата същност и квантовите механизми на взаимодействие между материалните частици (Куперовите двойки), преносители на Джозефсоновия ток. Известно е, че състоянията в квантовите системи се описват с така наречените вълнови функции, които са елементи на Хилбертовото пространство на квадратично интегруемите комплекснозначни функции. Зависимостта на Джозефсоновия ток от разликата във фазите на вълновите функции в свръхпроводящите материали, чиято измеряема физическа мярка е разпределението на магнитния поток, в повечето случаи може да се смята за нечетна строго 2π-периодична функция и, следователно, тя може да бъде представена в ред на Фурие по синуси. Именно тези случаи от фундаменталната наука за кондензираните среди са интересните от гледна точка на приложението им в съвременната наноелектрониката. От физическия експеримент е добре известно, че с достатъчна степен на точност, редица физически системи (така наречените дълги контакти), като например „свръхпроводник-метал-изолатор-метал-свръхпроводник“ и „свръхпроводник-феромагнетик-изолатор-феромагнетик-свръхпроводник“ се описват достоверно с приноса само на първите две хармонични, пренебрегвайки висшите хармонични. Адекватният математически модел за разпределението на магнитния поток, тогава се базира на „двойното синус-Гордън“ уравнение, със съответните гранични условия на Нойман в краищата на

Дата на получаване: 03.12.2018 г.
Дата на рецензиране: 29.03.2019 г.
Дата на публикуване: 17.05.2019 г.

дългия контакт. Дори и в стационарния случай, граничната задача е силно нелинейна и единственият инструмент за нейното цялостно изследване са числените методи. Целта на настоящата работа, обаче е, да покаже, че в случая на нулев външен ток, стационарното уравнение, разгледано върху краен интервал, се оказва напълно интегруем модел, произхождащ от вариационен принцип, с косинусов потенциал, описващ ефективно взаимодействие. В работата са получени в явен вид солитонни аналитични решения за разпределението на магнитния поток в краен интервал (съответстващ на дължината на контакта), описани в термини на елиптични синуси на Якоби. Аналитичните изследвания в този случай служат за сериозни насоки за по-нататъшно числено изучаване на тази многопараметрична нелинейна гранична задача, така важна за приложната нанофизика.

Keywords: *джозефсонови контакти, дълги контакти, разпределение на магнитния поток, аналитични решения, двойно синус-Гордън уравнение, нанофизика, гранична задача, нелинейна система, диференциални уравнения*

Mathematics Subject Classification 2000: *00A06, 00A79, 70G75, 70H12, 30E20, 34A05, 34A34*

1. Въведение

Съвременната наноелектроника е една от най-бързо развиващите се и модерни области на прякото технологично приложение на фундаментални изследвания в областта на физиката на кондензираните среди и в частност на джозефсоновите контакти (ДК) при различни материали. Важна роля в тези разглеждания играят физическите характеристики на магнитния поток φ (разликата на фазите на вълновите функции в свръхпроводящите слоеве), от който зависи Джосефсоновия ток. За приложната физика и нанотехнологите е от съществено значение да се изучават така наречените дълги ДК, които най-общо казано представляват система-сандвич, съставен от два слоя свръхпроводящ метал, които са разделени от тънък диелектричен слой (тунелна бариера). Съществените размери на системата са разположени по оста „x“, а по осите „y“ и „z“, линейните размери са пренебрежимо малки и магнитният поток φ в контакта, зависи само от x. Пълният ток през ДК съдържа компонента, която се нарича „свръхток“ (ток на Джозефсон) I_s [1]. Зависимостта на величината I_s от разликата на фазите на вълновите функции в свръхпроводящите слоеве в повечето случаи може да се смята за нечетна строго 2π-периодична функция [2] и, следователно, тя може да бъде представена в ред на Фурие по синуси

$$I_S = I_c \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} I_m \sin m\varphi. \qquad (1)$$

Основната амплитуда I_c (съответстваща на критичния ток на ДК), както и амплитудите пред висшите хармонични I_m, зависят от геометрията, материалите и технологиите на изготвяне на контакта [3, 4].

В повечето случаи всички членове в (1), освен първия, могат да се пренебрегнат, откъдето се получава „традиционният“ модел $I_c \sin\varphi$. Обаче, съществуват реални физически приложения за дълги ДК, при моделирането на които е необходимо да се отчита не само първия, но и висшите членове в разлагането (1). От физическия експеримент е добре известно, че с достатъчна степен на точност, редица физически системи, като например „свръхпроводник-метал-изолатор-метал-свръхпроводник“ и „свръхпроводник-феромагнетик-изолатор-феромагнетик-свръхпроводник“ се описват достоверно с приноса само на първите две хармонични, пренебрегвайки висшите хармонични (виж, например, работите [6, 7]. Тогава Джосефсоновият ток, в безразмерни термини, се апроксимира като

$$I_S = I_c \sin\varphi + \sum_{m=2}^{\infty} I_m \sin m\varphi \sim a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi. \qquad (2)$$

В контекста на това моделно описание, съответстващо на реални физически системи, безразмерното разпределение на магнитния поток φ се подчинява на „двойното синус-Гордън“ уравнение за $t > 0$ и $x \in (-l, l)$:

$$\varphi''(x,t) - \ddot{\varphi}(x,t) - \alpha\,\dot{\varphi}(x,t) = a_1 \sin\varphi(x,t) + a_2 \sin 2\varphi(x,t) - \gamma. \qquad (3)$$

Случаят на припокриващ се контакт с крайна дължина $2l$, влече след себе си изпълнението на следните гранични условия:

$$\varphi'(-l,t) = \varphi'(+l,t) = h_e. \qquad (4)$$

В горните изрази, h_e е големината на външното магнитно поле по направление на оста y, γ е външният ток, а $\alpha \geq 0$ е коефициента в члена, който определя дисипацията на енергията в системата. Тук a_1 и a_2 са амплитудите на първата и втората хармонични в реда на Фурие, даващ зависимостта на Джозефсоновия ток от разпределението на магнитния поток (2). В зависимост от физическите приложения, a_2 може да бъде както положително, така и отрицателно.

От различните физически теории, като например флуидо-динамиката и, разбира се, квантовите теории във всичките им проявления (каквато е и дълбоката физическа природа на джозефсоновите контакти), е добре известно, че е от съществена важност, първо пълно да се изследва стационарния случай. Още повече, че тогава изчезва и дисипативния член в уравнението на двойния синус-Гордън (3) и това води до запазване на пълната енергия в системата.

В стационарния случай, който ние ще разглеждаме по нататък, граничната задача произтичаща от (3) и (4) се записва по следния начин:

$$\begin{aligned} &\varphi''(x) - a_1 \sin\varphi(x) - a_2 \sin 2\varphi(x) + \gamma = 0, \ -l < x < l, \\ &\varphi'(-l) = \varphi'(+l) = h_e. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Явни решения за магнитния поток

От квантовата природа на свръхпроводимостта е добре известно, че фермионите-електрони при определени физически условия престават да се подчиняват на принципа (забраната) на Паули и се сдвояват в Куперови двойки, които стават носители на свръхтока на Джозефсон. Математическото описание на квантовите състояния става с помощта на Хилбертовото пространство на комплексно-значните квадратично интегруеми функции на реален аргумент. Физически реално измеряемата мярка за тяхната фаза, в случая на ДК, се явява разпределението на магнитния поток φ.

В този раздел, провокирани от липсата на дисипативен член в стационарния случай за уравнението (3), ще покажем, че е възможно получаването на явни аналитични решения за разпределението на магнитния поток φ, при нулев външен ток за дълги ДК. Преди всичко, нека получим израза за запазващата се енергия на системата, което ще ни помогне да понижим реда на уравнението в граничната задача (5). За тази цел, умножаваме уравнението (5) с φ' (тук и навсякъде надолу, явното изписване на зависимостта от пространствената променлива „x“ се пропуска за опростяване на записа) :

$$\varphi''(x) - a_1 \sin\varphi - a_2 \sin 2\varphi + \gamma = 0. | \varphi'. \tag{6}$$

Това води до отделяне на пълна производна по променливата x, описваща дължината на контакта:

$$\frac{d}{dx}\left\{ \frac{\varphi'^{\,2}}{2} + a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi + \gamma\varphi \right\} = 0. \tag{7}$$

Интегрирайки веднъж горното уравнение, лесно получаваме вида на пълната енергия, която остава константна величина върху решението за разпределението на магнитния поток:

$$\frac{\varphi'^{\,2}}{2} + a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi + \gamma\varphi = E. \tag{8}$$

Ефективно, пълната енергия винаги има вида на сума от „кинетичен“ и „потенциален“ член и следователно не е трудно да се определи вида на ефективния потенциал, описващ ефективното взаимодействие в консервативната система. От горното уравнение е ясно, че той се дава от израза:

$$V(\varphi) = a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi + \gamma\varphi. \tag{9}$$

Този поглед върху проблема ни дава възможност да формулираме граничната задача (5), като произтичаща от по-общ принцип, а именно от вариационния принцип [8] или по-точно, като уравнение и гранични условия за екстремалата на следния интегрален функционал:

$$\Phi(\varphi) = \int_{-l}^{+l} L_{eff}\left(\varphi, \varphi^{'}\right) dx. \tag{10}$$

Тук ядрото L_{eff} на функционала се явява ефективен Лагранжиан на вариационната задача и по правило, следващо от аналитичната механика [8], винаги се построява като разлика между „кинетичен“ и „потенциален“ член:

$$L_{eff}\left(\varphi, \varphi^{'}\right) = \frac{\varphi^{'\,2}}{2} - a_1\cos\varphi - \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi - \gamma\varphi - h_e\varphi^{'} \tag{11}$$

или

$$L_{eff}\left(\varphi, \varphi^{'}\right) = \frac{\varphi^{'\,2}}{2} - V(\varphi) - h_e\varphi^{'}. \tag{12}$$

Добавката на магнитното поле $h_e\varphi^{'}$ в ефективния Лагранжиан не променя диференциалното уравнение за екстремалата (понеже е пълна производна), но е от съществено значение за получаването на граничните условия за магнитното поле, при произволни вариации на магнитния поток φ по границите на контакта $-l$ и l. Съгласно вариационният принцип, уравнението за φ и граничните условия за магнитното поле $\varphi^{'}$, следват от условието за нулева първа вариация на интегралния функционал (10) при всякакви вариации по краищата на магнитния поток, т.е. $\delta\Phi(\varphi) = 0,\ \forall\ \delta\varphi(x)|_{x=\pm l}$:

$$\delta\Phi(\varphi) = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L_{eff}}{\partial\varphi^{'}}\right) - \dfrac{\partial L_{eff}}{\partial\varphi} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial L_{eff}}{\partial\varphi^{'}}\delta\varphi(x)\right)\Bigg|_{x=-l}^{x=+l} = 0,\ \forall\ \delta\varphi(x)|_{x=\pm l} \end{array} \right. \Leftrightarrow \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \varphi''(x) - a_1 \sin\varphi - a_2 \sin 2\varphi + \gamma = 0 \\ \varphi'(-l) = \varphi'(+l) = h_e \end{array} \right. \tag{14}$$

Вариационната формулировка на граничната задача ще е от съществена полза при по-нататъшното изучване на този тип дълги ДК, в контекста на изследването им за устойчивост и от гледна точка на получаване на явни решения.

За достатъчно широк клас от реални физически системи от тип дълги ДК [9, 10, 11], безразмерната мярка за външния ток γ е много по-малка от единица, т.е. $|\gamma| \ll 1$. Следователно нейното пренебрегване в ефективния потенциал на взаимодействие в системата (9) и апроксимирането му с $V \approx a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi$ ще доведе само до леко отместване на точките, където се реализира екстремум на ефективната потенциалната енергия на системата, но те ще запазят броя и вида си. Това означава, че фазовият портрет породен от потока екстремали на вариационната задача ще остане качествено същия, т.е. топологично двата фазови портрета, този на апроксимираната и на истинската система, няма да се различават. Тази апроксимация обаче, би ни дала възможност по сравнително лесен начин напълно да интегрираме граничната задача и да получим в аналитичен вид явни решения за краен интервал на контакта, които няма да водят до съществени качествени промени във фазовите криви. Тези важни аргументи ни дават основание в диференциалното уравнение от първи ред (8) да положим $\gamma = 0$:

$$\frac{\varphi'^{\,2}}{2} + a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2}\cos 2\varphi = E. \tag{15}$$

Разбира се, тук константата E (енергията на системата) зависи от граничните условия, при гранични задачи, което е еквивалентно на зависимостта от началните условия, при начални задачи.

Записвайки горното уравнение в по-удобна форма и умножавайки го по $\sin^2\varphi$, можем последователно да получим следните му еквивалентни записи:

$$\frac{\varphi'^{\,2}}{2} + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos^2\varphi - \frac{a_2}{2} = E.|\sin^2\varphi, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi' \sin\varphi\right]^2 + a_1 \cos\varphi \sin^2\varphi + a_2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi - \frac{a_2}{2}\sin^2\varphi = E \sin^2\varphi, \tag{17}$$

$$\left[-\frac{d}{dx}\cos\varphi\right]^2+2a_1\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)+2a_2\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)-a_2(1-\cos^2\varphi)= \\ =2E(1-\cos^2\varphi). \tag{18}$$

Ясно е, че ако положим $\cos\varphi=u,\ -1\le u\le 1,$ ще пренапишем уравнението в термините на новата функция $u(x)$, с дясна страна, полином от четвърта степен на u:

$$\left(\frac{d}{dx}u\right)^2=(1-u^2)\left[-2a_2u^2-2a_1u+a_2+2E\right]\ge 0. \tag{19}$$

Множеството на валидност на горното уравнение изисква дясната му страна да бъде неотрицателна. Тъй като множителят $(1-u^2)$ в този случай е винаги неотрицателен, то полиномът от втора степен $P(u)=-2a_2u^2-2a_1u+a_2+2E$ трябва също да приема неотрицателни стойности при $-1\le u\le 1$. Вижда се, че това е възможно в много случаи. Изобщо, неотрицателността на дясната страна е валидна при много възможни наредби на корените на полинома от четвърта степен в дясната страна на (19).

Нека фиксираме един от случаите, когато дискриминантата на $P(u)$ е положителна и $a_2=-|a_2|<0$. Тогава означавайки с $u_{1,2}$ корените на полинома имаме

$$P(u)=-2a_2u^2-2a_1u+a_2+2E=2|a_2|u^2-2a_1u+2E-|a_2|= \\ =2|a_2|(u-u_1)(u-u_2). \tag{20}$$

Един възможен подслучай се реализира при наредбата $1\ge u(x)\ge -1>u_2>u_1$ на корените на дясната страна на (19):

$$\left(\frac{d}{dx}u\right)^2=2|a_2|(1-u)(u-(-1))(u-u_2)(u-u_1). \tag{21}$$

Следователно, ние вече можем да интегрираме горното уравнение, съобразявайки, че $u(x)$ е монотонно намаляваща функция, когато φ расте, с нарастването на аргумента x:

$$\int_{u(x)}^{1}\frac{du}{\sqrt{(1-u)(u-(-1))(u-u_2)(u-u_1)}}= \\ =\sqrt{2|a_2|}\int_{x_0}^{x}dx=\sqrt{2|a_2|}(x-x_0), \tag{22}$$

където $1 \geq u(x) \geq -1 > u_2 > u_1$. Както е добре известно [12, 13], интегралът от ляво

$$\int_{u(x)}^{a} \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)(z-c)(z-d)}}, \; a \geq u \geq b > c > d \tag{23}$$

се изразява чрез елиптичен интеграл от първи род

$$\int_{u(x)}^{a} \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)(z-c)(z-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\mu, r), \tag{24}$$

където

$$\mu = \arcsin \sqrt{\frac{(b-d)(a-u(x))}{(a-b)(u(x)-d)}}, \; r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}. \tag{25}$$

От (22) и (24) следва, че

$$\begin{gathered} F(\mu, r) = \frac{\sqrt{2|a_2|(a-c)(b-d)}}{2}(x-x_0), \\ a=1,\, b=-1,\, c=u_2=-|u_2|,\, d=u_1=-|u_1|. \end{gathered} \tag{26}$$

Изразяването на μ става чрез „обръщането“ на елиптичния интеграл от първи род $F(\xi, \kappa)$, с помощта на елиптичния синус на Якоби $sn(F \mid \kappa)$:

$$\sin \xi = sn(F \mid \kappa), \tag{27}$$

или в нашия случай имаме

$$\sin \mu = sn\left[\frac{\sqrt{2|a_2|(a-c)(b-d)}}{2}(x-x_0) \,\middle|\, r\right]. \tag{28}$$

Следователно

$$\begin{gathered} \sin\left\{\arcsin \sqrt{\frac{(b-d)(a-u(x))}{(a-b)(u(x)-d)}}\right\} = \\ = sn\left[\frac{\sqrt{2|a_2|(a-c)(b-d)}}{2}(x-x_0) \,\middle|\, r\right], \end{gathered} \tag{29}$$

$$\frac{(b-d)(a-u(x))}{(a-b)(u(x)-d)} = sn^2\left[\frac{\sqrt{2|a_2|(a-c)(b-d)}}{2}(x-x_0) \,\middle|\, r\right]. \tag{30}$$

Отчитайки, че $a=1, b=-1, c=u_2=-|u_2|, d=u_1=-|u_1|, \; |u_1|>1, |u_2|>1$, изразът за $u(x)$ има вида

$$u(x)=\frac{1-\dfrac{2|u_1|}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]}{1+\dfrac{2}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]},\tag{31}$$

където $B=\dfrac{\sqrt{2|a_2|(1+|u_2|)(|u_1|-1)}}{2}>0,\ -l\le x_0\le x<l$ и $u(x)=\cos\varphi(x)$.

Изпълнено е и, че

$$-1\le\cos\varphi(x)=\frac{1-\dfrac{2|u_1|}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]}{1+\dfrac{2}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]}\le 1.\tag{32}$$

От тази формула е вече лесно да се получи функцията за разпределението на магнитния поток върху интервала, даващ дължината на контакта $-l\le x_0\le x<l$. За един интервал на монотонност на $sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]$ получаваме

$$\varphi(x)=\arccos\left\{\frac{1-\dfrac{2|u_1|}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]}{1+\dfrac{2}{|u_1|-1}sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]}\right\},\tag{33}$$

където модуларният параметър в елиптичния интеграл от първи род има вида

$$r=\sqrt{\frac{2(|u_1|-|u_2|)}{(1+|u_2|)(|u_1|-1)}}.\tag{34}$$

Отчитайки факта, че елиптичният синус на Якоби е периодична функция, с период четири пъти пълния елиптичен интеграл от първи род $4\mathbb{K}(r)$, имаме $B=\mathbb{K}(r)/2l$ и $x_0=-l$, т.е. за интервала на монотонност на $sn^2\left[B(x-x_0)\,|\,r\right]$ изменението на аргумента x между $-l$ и l и ще имаме разпределение на магнитния поток

$$\varphi(x)=\arccos\left\{\frac{1-\dfrac{2|u_1|}{|u_1|-1}sn^2\left[\dfrac{\mathbb{K}(r)}{2l}(x+l)\,|\,r\right]}{1+\dfrac{2}{|u_1|-1}sn^2\left[\dfrac{\mathbb{K}(r)}{2l}(x+l)\,|\,r\right]}\right\}.\tag{35}$$

Потокът $\varphi(x)$ трябва да удовлетворява и граничните условия $\varphi'(\pm l) = h_e$. Налагането им ще фиксира всичките параметри в аналитичното решение.

3. Заключение

В заключение е важно да отбележим, че аналитичните решения дават важни насоки за численото параметрично изследване на нелинейните модели на системи от дълги джозефсонови контакти, така важни за приложната нанофизика.

4. Благодарности

Изследванията залегнали в статията бяха осъществени предимно чрез финансовата подкрепа по проект ФП17-ФМИ-008, за което изказваме специална благодарност.

Литература

[1] Лихарев, К., *Введение в динамику джозефсоновских переходов*, Москва, „Наука"", ГРФМЛ, 1985.

[2] Лихарев, К., Сверхпроводящие слабые связи: стационарные процессы, *УФН*, 1979, Т. 127, 185.

[3] Buzdin, A., A. Koshelev, Periodic alternating 0-and π-junction structures as realization of φ-Josephson junctions, *Phys. Rev. B* Vol.67, 220504(R), 2003.

[4] Golubov, A., M. Kypriyanov, E. Ilíchev, The current-phase relation in Josephson junctions, *Rev. Mod. Phys.*, V76, 411, Apr 2004, 411.

[5] Alfimov, Г., A. Malishevskii, E. Medvedeva, Discrete set of kink velocities in Josephson structures: The nonlocal double sine-Gordon model, *Physica D* 282 (2014) 16-26.

[6] Goldobin, E., D. Koelle, R. Kleiner, and A. Buzdin, Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of junctions, *Phys. Rev. B* 76 (2007) 224523.

[7] Goldobin, E., D. Koelle, R. Kleiner, R. Mints, Phase Retrapping in a Pointlike Josephson Junction: The Butterfly Effect, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 227001.

[8] Гельфанд, И., С. Фомин, *Вариационное исчисление*, М.: Наука, 1961.

[9] Atanasova, P., E. Zemlyanaya, Yu. Shukrinov, Numerical study of fluxon solutions of sine-Gordon equation under the influence of the boundary conditions, *Lecture Notes in Computer Sciences* 7125 (2012) 201-206.

[10] Atanasova, P., E. Zemlyanaya, Yu. Shukrinov, Interconnection between static regimes in the LJJs described by the double sine-Gordon equation, *Journal of Physics: Conference Series* 393 (2012) 012023.

[11] Atanasova, P., E. Zemlyanaya, Bifurcations in long Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Numerical study, *Lecture Notes in Computer Sciences* 8236 (2013) 189-196.

[12] Gradshteyn, I., I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th Edition, Elsevier.

[13] Polyanin, A., A. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, CRC Press LLC, 1998.

Факултет по математика и информатика

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

бул. „България“ № 236, 4003 Пловдив, България

e-mail: atanasova@uni-plovdiv.bg

ANALITICAL SOLUTIONS OF A DOUBLE SINE-GORDON STATIONARY EQUATION DESCRIBING LONG JOSEPHSON JUNCTIONS

Pavlina Atanasova, Hristo Dimov

Abstract. The deep physical nature of Josephson junctions is predetermined by the quantum essence and quantum mechanisms of interaction between the material particles (Couper's pairs) carrying the Josephson current. It is known that states in quantum systems are described by so-called wave functions, which are elements of the Hilbert space of the quadratic integrable complex-value functions. The dependence of Josephson current on the wavelength phase difference in superconducting materials, whose measurable physical measure is the distribution of the magnetic flux, is 2π-periodic function, and hence it can be presented in Fourier series by sinus. These are the cases from the fundamental science of condensed matter that are interesting in terms of their application in modern nanoelectronics. It is well-known from the physical experiment that with a sufficient degree of precision, a number of physical systems (so-called long contacts), such as superconductor-metal-insulator-metal-superconductor and superconductor-ferromagnetic-insulator-ferromagnetic-superconductor, are reliably

described with the contribution of only first two harmonic, neglecting the higher harmonics. The adequate mathematical model for the distribution of the magnetic flux is then based on the “double sine-Gordon” equation, with Neumann's boundary conditions at the ends of the long contact. Even in the stationary case, the boundary problem is highly nonlinear and the only tool for its comprehensive study is numerical methods. The aim of the present work, however, is to show that in the case of zero external current, the stationary equation turns out to be a fully integrable model, derived from a variation principle with a cosine potential describing the efficient interaction. Analytical solutions for the magnetic flux distributions at the end interval (corresponding to the length of the contact), described in the terms of Jacobi’s elliptical sinuses are derived in the current work. Analytical studies in this case serve as serious guidelines for further numerical study of this multiparametric non-linear boundary problem, so important for applied nanophysics.