

КОМПЮТЪРНА РЕАЛИЗАЦИЯ НА НЯКОИ ПРИБЛИЖЕНИ МЕТОДИ ЗА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ДРОБЕН РЕД

Ангел Голев, Снежана Христова

Резюме. Едно от основните свойства на диференциалните оператори от дробен ред е т.н. памет и наследственост. Това ги прави мощен апарат за моделиране на процеси и явления в науката и инженерството, които имат аномалии в динамиката. В същото време има много малък клас от диференциални уравнения от дробен ред, които могат да бъдат решени в затворена форма. Дори и при най-простия случай на скаларни линейни уравнения с постоянни коефициенти, решението не може да се намери в явен вид, независимо, че има теоретична формула. Това води до проблеми в практическите приложения и обуславя необходимостта от обосноваване на методи за приближеното им решаване и създаване на подходящи компютърни реализации. Един от методите се базира на използването на долни и горни решения и итерации. В настоящата работа е направен кратък обзор на няколко итеративни схеми за приближено асимптотично решаване на началната задача на диференциални уравнения от дробен ред от типа на Капуто. Предложени са алгоритми за рекурентно получаване на последователните приближения на решението. В случаите, когато тези приближения не могат да се намерят в явен вид, поради наличието на функции на Митаг-Лефлер, се използва софтуерно приложение за численото пресмятане на последователните приближения. С използването на метода на трапеците се предлага решение за изчисляване на интеграли, които съдържат функции на Митаг-Лефлер. По този начин е решен един конкретен пример.

Ключови думи: производни от дробен ред, диференциални уравнения, итеративни схеми, долни и горни решения, софтуерна реализация

1. Въведение

Различни процеси и явления в природата, науката и инженерството притежават аномалии при своята динамика на развитие, които адекватно се моделират с диференциални оператори от дробен ред, тъй като те притежават памет и наследственост ([3, 4, 5, 6]).

В същото време много малко от диференциалните уравнения с производни от дробен ред могат да се решат в явен вид. Дори и скаларните линейни уравнения с променливи коефициенти в общия случай не могат да бъдат решени явно. А за решенията на скаларните диференциални уравнения от дробен ред, както от типа на Риман-Луивил, така и от типа на Капуто, има формула за решението, но тя включва функция на Митаг-Лефлер в интеграла, който само в частни случаи може да бъде решен в явен вид. Това води до необходимостта от обосноваване на числени или приближени методи за решаване на диференциални уравнения от дробен ред.

Основната цел на тази работа е да се илюстрира практическото приложение на алгоритми, дадени в [1, 2], реализирани като компютърна програма и използвани за решаване на конкретни задачи за скаларни диференциални уравнения от дробен ред от типа на Капуто.

2. Основни резултати

Разглеждаме началната задача (НЗ) за нелинейното диференциално уравнение от дробен ред от вида на Капуто (ДДЕК)

$$\begin{aligned} {}^C D_t^q x(t) &= F(t, x(t)) \text{ за } t \in [t_0, t_0 + T], \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

където $q \in (0, 1)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

В статиите [1] и [2] са предложени и теоретично обосновани няколко схеми за итерационно решаване на НЗ за ДДЕК (1). Тези схеми се базират на използването на подходящо избрани долни и горни решения и се построяват две редици от функции дефинирани в $[t_0, t_0 + T]$, които съответно, монотонно растейки и намалявайки, клонят към съответното решение, т.е. на всяка стъпка те дават горна и долна граница на неизвестното решение.

За да се обобщят разглежданията и се разшири класа от уравнения, за които може да се прилагат предложените алгоритми, се разглеждат долни и горни решения, които започват в различно начално време. Ще обърнем внимание на факта, че промяната на началното време се отразява не само на началното условие, но и на производната.

Освен това някои от тези схеми са компютърно реализирани и приложени за конкретни примери.

Ако функцията $x(t)$ е решение на НЗ за ДДЕК (1) в интервала $[t_0, t_0 + T]$, тогава тя удовлетворява следното интегрално уравнение

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} F(s, x(s)) ds \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T] \quad (2)$$

и обратно, ако функцията $x \in C^q([t_0, t_0 + T], \square)$ е решение на (2), тогава тя е решение на НЗ за ДДЕК (1) в интервала $[t_0, t_0 + T]$.

Тогава долно (горно) решение на НЗ за ДДЕК (1) в интервала $[t_0, t_0 + T]$ наричаме функция, която удовлетворява (2) за неравенство \leq (\geq).

Основата на монотонно-итеративната техника, която ще използваме, е скаларното диференциално уравнение от дробен ред

$${}^c D_t^q u(t) = \lambda u(t) + h(t) \quad \text{при } t \in (\tau, \tau + T], \quad (3)$$

където $u_0 \in \square$, $u, h: [\tau, \tau + T] \rightarrow \square$, $\tau \geq 0$ е зададено число, а λ е константа.

Началната задача (3) има единствено решение, което е дадено с формулата (виж [4]):

$$u(t) = u_0 E_q(\lambda(t-\tau)^q) + \int_{\tau}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) h(s) ds, \quad t \in [\tau, \tau + T], \quad (3)$$

където функциите $E_q(\lambda(t-\tau)^q)$ и $E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)$ са функциите на Митаг-Лефлер с един и с два параметъра съответно.

За всяка функция $\xi \in C([t_0, t_0 + T], \square)$ и константа M дефинираме оператор

$$\Omega(\xi)(t) = x_0 E_q(-M(t-t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(-M(t-s)^q) (F(s, \xi(s)) + M \xi(s)) ds.$$

Забележка 1. Съгласно [1], ако функцията $\xi \in C^q([t_0, t_0 + T], \square)$ е неподвижна точка на оператора Ω , то тя е решение на НЗ за ДДЕК (1) и обратно.

Алгоритъмът за построяване на последователни приближения е даден и обоснован в следната теорема:

Теорема 1. [1] Нека са изпълнени следните условия:

1. За точките $\theta_0, t_0, \tau_0: 0 \leq \theta_0 \leq t_0 \leq \tau_0$ функцията $v \in C^q([\theta_0, \theta_0 + T])$ е долно решение на НЗ за ДДЕК (1) в интервала $[\theta_0, \theta_0 + T]$, а функцията $w \in C^q([\tau_0, \tau_0 + T])$ е горно решение на НЗ за ДДЕК (1) в

интервала $[\tau_0, \tau_0 + T]$ и са изпълнени неравенствата $v(t - \eta) \leq w(t + \xi)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, където $\eta = t_0 - \theta_0 \geq 0$, $\xi = \tau_0 - t_0 > 0$.

2. Функцията $F \in C([\theta_0, \theta_0 + T] \cup [t_0, t_0 + T] \cup [\tau_0, \tau_0 + T] \times \square, \square)$ е намаляваща по отношение на първия си аргумент $t \in [t_0, t_0 + T]$ и съществува константа $M > 0$ такава, че при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x, y \in \square$: $v(t - \eta) \leq x \leq y \leq w(t + \xi)$ е изпълнено $F(t, x) - F(t, y) \leq -M(x - y)$.

Тогаво съществуват две редици от функции $\{v^{(n)}(t)\}_0^\infty$ и $\{w^{(n)}(t)\}_0^\infty$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ такива, че:

- а. Елементите на редиците са дефинирани чрез $v^{(0)}(t) = v(t - \eta)$, $w^{(0)}(t) = w(t + \xi)$ и при $n \geq 1$

$$v^{(n)}(t) = x_0 E_q(-M(t - t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t - s)^{q-1} E_{q,q}(-M(t - s)^q) \times \\ \times (F(s, v^{(n-1)}(s)) + Mv^{(n-1)}(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4)$$

и

$$w^{(n)}(t) = x_0 E_q(-M(t - t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t - s)^{q-1} E_{q,q}(-M(t - s)^q) \times \\ \times (F(s, w^{(n-1)}(s)) + Mw^{(n-1)}(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (5)$$

- б. Функциите $v^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$ удовлетворяват неравенствата $v^{(n)}(t) \leq \Omega(v^{(n)})(t)$.

- в. Функциите $w^{(n)}(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$ удовлетворяват неравенствата $w^{(n)}(t) \leq \Omega(w^{(n)})(t)$.

- г. Редицата $\{v^{(n)}(t)\}$ е растяща в интервала $[t_0, t_0 + T]$, т.е.

$$v^{(k-1)}(t) \leq v^{(k)}(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T], k = 1, 2, \dots$$

- д. Редицата $\{w^{(n)}(t)\}$ е намаляваща в интервала $[t_0, t_0 + T]$, т.е.

$$w^{(k-1)}(t) \geq w^{(k)}(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T], k = 1, 2, \dots$$

- е. Изпълнени са неравенствата

$$v^{(k)}(t) \leq w^{(k)}(t) \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + T], k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

- ж. Двете редици са сходящи в интервала $[t_0, t_0 + T]$ и техните граници са

$$V(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{(k)}(t) \quad \text{и} \quad W(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)}(t) \quad \text{в интервала } [t_0, t_0 + T].$$

з. Границите $V(t)$ и $W(t)$ са неподвижни точки на оператора Ω , т.е. $V(t) = \Omega(V)(t)$ и $W(t) = \Omega(W)(t)$.

и. Границите $V(t)$ и $W(t)$ са решение на НЗ за ДДЕК (1) в интервала $[t_0, t_0 + T]$.

Пример 1. Нека $t_0 = 1$, $T = 0.4$, $q = 0.3 \in (0, 1)$ и разглеждаме НЗ за ДДЕК, което е обобщение на логистичното уравнение, използвано при моделиране на процеси във физиката, в биологията и пр. (виж [3])

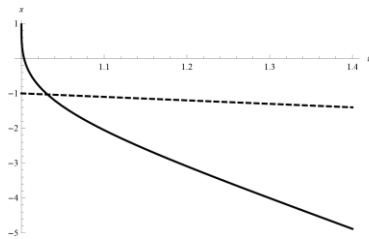
$$\begin{aligned} {}_1^c D_t^{0.3} x(t) &= x(t)(4 - x(t)) \text{ при } t \in [1, 1.4], \\ x(1) &= 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Функцията $v(t) = -t$ не е долно решение на (7) в интервала $[1, 1.4]$, защото не удовлетворява неравенството (виж фигура 1)

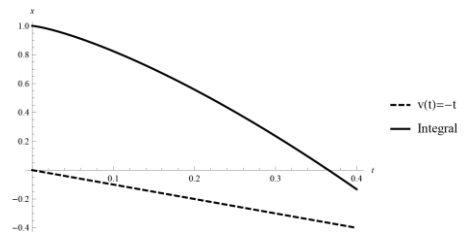
$$-t \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(0.3)} \int_1^t (t-s)^{-0.7} s(4+s) ds \text{ при } t \in [1, 1.4], \quad (8)$$

но тя е долно решение в интервала $[0, 0.4]$ на (7), защото удовлетворява неравенството (виж фигура 2)

$$-t \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(0.3)} \int_0^t (t-s)^{-0.7} s(4+s) ds \text{ при } t \in [0, 0.4]. \quad (9)$$



Фигура 1. Графика на функцията $v(t) = -t$ и съответния интеграл в $[1, 1.4]$



Фигура 2. Графика на функцията $v(t) = -t$ и съответния интеграл в $[0, 0.4]$

Функцията $w(t) = 4.5$ е горно решение в $[1, 1.4]$ на (7), доколкото е изпълнено неравенството (виж фигура 3).

$$4.5 \geq 1 + \frac{1}{\Gamma(0.9)} \int_1^t (t-s)^{-0.7} 4.5(4-4.5) ds \text{ при } t \in [1, 1.4]. \quad (10)$$

Дефинираме двете нулеви приближения: $v^{(0)}(t) = v(t-1) = -(t-1)$ и $w^{(0)}(t) = w(t) = 4.5$ при $t \in [1, 1.4]$. Функцията $f(t, x) = x(4-x)$ е локално Липшицова. Нека $x, y \in \square$: $v^{(0)}(t) = -t+1 \leq x \leq y \leq w^{(0)}(t) = 4.5$, $t \in [1, 1.4]$.

Тогава използвайки, че

$$-0.8 < -2(1.4) + 2 \leq -2t + 2 \leq x + y - 0.8 < -2(1.4) + 2 \leq -2t + 2 \leq 1 - x - y \leq 1.8$$

получаваме $-x(1-x) - y(1-y) = -(x-y)(1-x-y) < -1.8(x-y)$, т.е. можем да приложим итеративната схема предложена в Теорема 1 с константа $M = 3.8$:

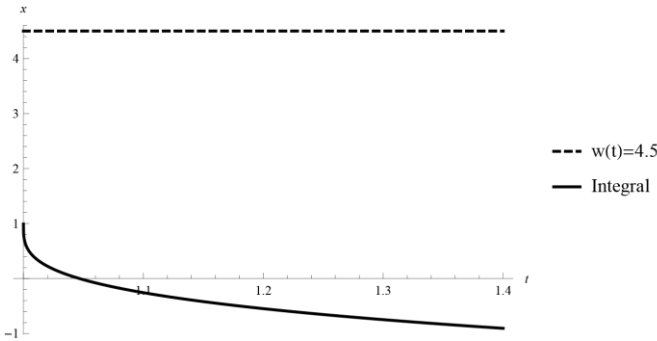
$$v^{(n)}(t) = E_{0.3}(-3.8(t-1)^{0.3}) + \int_1^t (t-s)^{-0.7} E_{0.3,0.3}(-3.8(t-s)^{0.3}) \psi^{(n)}(s) ds, \quad t \in [1, 1.4] \tag{11}$$

$$w^{(n)}(t) = E_{0.3}(-3.8(t-1)^{0.3}) + \int_1^t (t-s)^{-0.7} E_{0.3,0.3}(-3.8(t-s)^{0.3}) \Psi^{(n)}(s) ds, \quad t \in [1, 1.4], \tag{12}$$

където

$$\psi^{(n)}(t) = v^{(n-1)}(t)(4 - v^{(n-1)}(t)) + 3.8v^{(n-1)}(t), \quad t \in [1, 1.4], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Psi^{(n)}(s) = w^{(n-1)}(s)(4 - w^{(n-1)}(s)) + 3.8w^{(n-1)}(s), \quad t \in [1, 1.4], \quad n = 1, 2, \dots$$

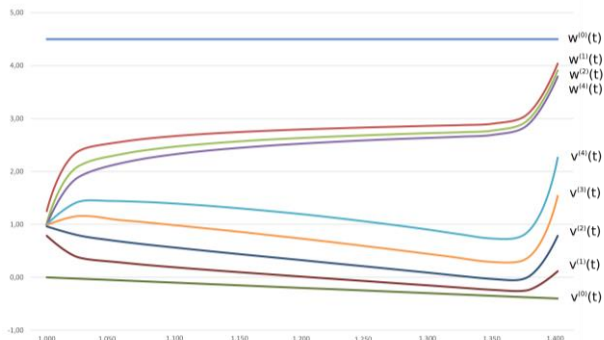


Фигура 3. Графика на функцията $w(t) = 4.5$ и съответния интеграл в $[1, 1.4]$

Горните интегрални не могат да бъдат решени в затворена форма, поради наличието на функциите на Митаг-Лефлер с един и с два параметъра. Това налага да се използва числен метод и специална компютърна програма. Компютърният алгоритъм е описан накратко в параграф 3, а част от числените резултати са дадени в Таблица 1 и графиките на последователните приближения са дадени на Фигура 4. От Таблица 1 и Фигура 4 се вижда, че са изпълнени твърденията на Теорема 1.

$$v^{(1)}(t) = E_{0.3}(-3.8(t-1)^{0.3}) + \int_1^t (t-s)^{-0.7} E_{0.3,0.3}(-3.8(t-s)^{0.3})((1-s)(6.8+s)) ds$$

$$w^{(1)}(t) = E_{0.3}(-3.8(t-1)^{0.3}) + 14.85 \int_1^t (t-s)^{-0.7} E_{0.3,0.3}(-3.8(t-s)^{0.3}) ds$$



Фигура 4. Графика на долни $v^{(n)}(t)$ и горни $w^{(n)}(t)$ последователни приближения в $[1,1.4]$

t	1.0001	1.0500	1.1000	1.1500	1.2000	1.2500	1.3000	1.3500	1.4000
$w^{(0)}(t)$	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000	4.5000
$w^{(1)}(t)$	1.2499	2.5316	2.6691	2.7443	2.7951	2.8330	2.8629	2.9059	4.0312
$w^{(2)}(t)$	1.0284	2.2884	2.4680	2.5674	2.6348	2.6852	2.7251	2.7765	3.9026
$w^{(3)}(t)$	0.9968	2.1725	2.3742	2.4868	2.5633	2.6204	2.6654	2.7202	3.8256
$w^{(4)}(t)$	0.9929	2.1110	2.3256	2.4460	2.5277	2.5888	2.6369	2.6933	3.7861
$v^{(4)}(t)$	0.9922	1.4456	1.3966	1.3081	1.1944	1.0581	0.8989	0.7343	2.2617
$v^{(3)}(t)$	0.9890	1.1036	0.9856	0.8618	0.7302	0.5895	0.4385	0.2886	1.5351
$v^{(2)}(t)$	0.9623	0.7011	0.5629	0.4412	0.3233	0.2050	0.0846	-0.0332	0.7775
$v^{(1)}(t)$	0.7853	0.2981	0.1897	0.0984	0.0125	-0.0714	-0.1547	-0.2372	0.1048
$v^{(0)}(t)$	-0.0001	-0.0500	-0.1000	-0.1500	-0.2000	-0.2500	-0.3000	-0.3500	-0.4000

Таблица 1. Стойности на долни $v^{(n)}(t)$ и горни $w^{(n)}(t)$ последователни приближения в $[1,1.4]$

3. Компютърна реализация

Създадена е програмна система на C# за числено пресмятане на приближените поредици от интеграли $v^{(n)}$ и $w^{(n)}$.

В тези интеграли участва функцията на Митаг-Лефлер (E) с един и два параметъра:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \text{и} \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (13)$$

където $\Gamma(x)$ е Ойлеровата гама функция.

В общия случай това води до невъзможност тези интеграли да бъдат пресметнати със съвременните математически програмни системи, като Mathematica, Matlab и др.

Приближеното изчисляване на функцията E става в зависимост от стойностите на параметрите η или s пресмятане на безкрайна сходяща сума или с пресмятане на безкрайни интеграли.

При численото пресмятане на интегралите от вида (4) и (5), независимо от използвания метод, директното изчисляване на E в подинтегралната функция прави невъзможно получаването на резултат в реално време.

Ако в метода на трапеците използваме стъпка $h = 0.00001$, то за намирането на един от приближените интеграли в интервала $[1, 1.4]$ ще доведе до $0.4/h(0.4/h+1)/2 \sim 800000000$ пъти изчисляване на функцията E .

За да избегнем изчисляването на E всеки път, когато трябва да се намери стойността на подинтегралната функция в съответния числен метод, ние предварително намираме стойностите на $E_q(z)$ и $E_{q,q}(z)$ в точките $z = 1 + kh$, $k \in (1, 0.4/h)$, където h е точността на численото пресмятане. Стойностите се съхраняват в два масива, един за E_q и един за $E_{q,q}$. Независимо от големия брой точки пресмятането е с линейна сложност спрямо броя им и за нашия пример това става за 1–2 секунди.

За намиране стойностите на E изчисляваме безкрайните суми от формули (13) с предварително зададена точност.

В конкретния случай, с така избраните параметри на функцията E и дължината на интервала на интегралите, нямаме проблем с препълването на типа *double*.

В общия случай трябва да се използва друг метод за приближено изчисляване на E , тъй като и числителят и знаменателят на безкрайната сума излизат извън границите на вградения тип с плаваща точка.

В нашата компютърна реализация за изчисляването на гама функцията:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

използваме апроксимацията на Ланцош, публикувана от Корнейл Ланцош през 1964 г.

Предварително се намират и се съхраняват в масив всички стойности на Γ , необходими за изчисляването на функциите E_q и $E_{q,q}$.

Пресмятаме числено интегралите по метода на трапеците, с предварително избрана стъпка h .

Тъй като функциите $v^{(n)}(t)$ и $w^{(n)}(t)$ зависят от стойностите на тези функции от предходната итерация, съхраняваме стойностите на v и w в

масиви с дължина, съответстваща на броя на точките, в които се пресмята подинтегралната функция. Може да се съхранява само по една итерация за двете текущи приближения, а при наличие на достатъчно памет могат да се съхранят и всички итерации. Части от подинтегралната функция, които зависят само от t , също могат да бъдат предварително изчислени и съхранени в масив.

```
private double Calc_Vn (int n, long it, double tval)
{
    double f, pf, sum = 0, s = t0;
    long i = 0, ie = it;
    pf = Math.Pow(tval-s, q-1) * Eqq[ie] * psi[n, i];
    while (s < tval)
    {
        i++; ie--; s += h;
        f = Math.Pow(tval-s, q-1) * Eqq[ie] * psi[n, i];
        sum += (pf + f) * h;
        pf = f;
    }
    return Eq[it] + sum/2;
}
```

Програмата работи само с предварително зададен вид горни и долни приближения, като параметрите, които могат да се променят са q, M, t_0, T и броя на итерациите на горните и долни решения.

За конкретния пример, с точност 0.00001 и с по 5 приближения за горното и долно решение, програмата се изпълнява за около 12 минути.

Благодарности

Изследванията частично са финансирани от НПД при ПУ „Паисий Хилендарски“, договор ФП17-ФМИ-008.

Литература

- [1] Agarwal, R., A. Golev, S. Hristova, D. O'Regan and K. Stefanova, Iterative techniques with computer realization for the initial value problem for Caputo fractional differential equations, *J. Appl. Math. Comput.*, 2017, p. 35, DOI 10.1007/s12190-017-1152-x.
- [2] Agarwal, R., A. Golev, S. Hristova, D. O'Regan and K. Stefanova, Iterative techniques with initial time difference and computer realization for the initial value problem for Caputo fractional differential equations, *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.*, (accepted).
- [3] El-Sayed, A., A. El-Mesiry and H. El-Saka, On the fractional-order logistic equation, *Appl. Math. Letters*, 20, 2007, 817–823.

- [4] Kilbas, A., H. Srivastava and J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 2006.
- [5] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press: San Diego, 1999.
- [6] Nonnenmacher, T., Fractional relaxation equations for viscoelasticity and related phenomena, *Lect. Notes in Physics*, 381, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 309–320.

Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
бул. „България“ № 236, 4003 Пловдив, България
Имейл: angel.golev@gmail.com

COMPUTER REALIZATION OF SOME APPROXIMATE METHODS FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Angel Golev, Snezhana Hristova

Abstract. One of the main properties of the fractional differential operators is the so-called memory and heredity. This makes them a powerful device for modeling processes and phenomena in science and engineering that have anomalies in dynamics. At the same time there is a very small class of differential equations of fractional order that can be solved in a closed form. Even in the simplest case of scalar linear equations with constant coefficients, the solution cannot be found in an explicit form, although there is a theoretical formula. This leads to problems in practical applications and determines the need to justify methods to approximate them and create appropriate computer realizations. One method is based on the use of lower and upper solutions and iterations. In the present work, a brief overview of several iterative schemes is given for an approximate asymptotic solution of the initial value problem for fractional differential equations from Kaputo type. Algorithms are suggested for recursively obtaining successive approximations of the solution. In the cases when these approximations cannot be found explicitly due to Mittag-Leffler's functions, a software application for the numerical calculation of consecutive approximations is used. Using the trapezoid method, a solution is proposed for calculating integrals that contain Mittag-Leffler functions. In this way a specific example is solved.

Keywords: derivatives from fractional order, differential equations, iterative schemes, upper and lower solutions, computer realization