ТРАДИЦИИ, ПОСОКИ, ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА
Юбилейна национална научна конференция с международно участие
Смолян, 19–21 октомври, 2012

ЕДНА ПРИМЕРНА СИСТЕМА ОТ ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ

Пенка Гунчева

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", Филиал Смолян, България
pguncheva@abv.bg

AN EXEMPLARY SYSTEM OF EXPONENTIAL EQUATIONS

Penka Guncheva

Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Smolyan Branch, Bulgaria
pguncheva@abv.bg

Abstract. *The exponential equations included in the synopsis of the state matriculation exams and university admission tests in mathematics can also serve as criteria tasks. It is advisable that students' preparation for the above exams be done by practice tasks for solving exponential equations whose aim is to provide students with knowledge and skills to successfully solve criteria task. To achieve this goal tasks should be classified according to their general solving method. They should also be structured systematically so that solving each new type task should include solutions of previous types component tasks. Thus students can learn how to overcome the difficulties associated with studying exponential equations that have no general method of solving. In line with this approach in this presentation I am introducing a model structure of a practice tasks system for teaching solving of exponential equations.*

Key words*: structure, system task, exponential equation, classification*

Показателните уравнения, включени в темите за ДЗИ по математика, както и за кандидатстудентски изпити по математика (Милкоева 2009) могат да играят ролята на т. нар. критериални задачи. Общ метод за решаване на показателните уравнения не съществува. Целесъобразно е подготовката на учениците за изпитите да се извършва посредством учебни задачи за решаване на показателни уравнения, насочени към придобиване на знания и умения за справяне с критериалните задачи. За целта задачите трябва да бъдат класифицирани според общите им методи за решаване и структурирани в система, така че решенията на задачите от всеки следващ вид да включват решения на задачи-компоненти от предходни видове, което от своя страна изисква регулярно да се актуализира опитът на учениците за работа със задачи от изучаваните видове. Така учениците могат да се научат да преодоляват трудностите, свързани с изучаване на показателните уравнения. В съответствие с този подход в настоящото изложение представяме примерна структура на система от задачи за обучаване в решаване на показателни уравнения.

Необходимо условие за постигане на добри резултати по овладяването на знания и умения за решаване на показателни уравнения от съответните видове е притежаването на базови знания за прилагане на определенията и теоремите за релациите „следване" и „равносилност" на алгебрични уравнения, както и свойствата на алгебричните операции, в т.ч. степенуването и коренуването.

По-долу представяме следната систематизация на по-често срещаните задачи за решаване на показателни уравнения и съответните им методи за решаване.

I група. Уравнения от вида $p.a^{f(x)} + q.b^{g(x)} = r,$ където: $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1;$ $p \neq 0$ или $q \neq 0$. Общ метод (основаващ се на общата информация) за решаване на този вид уравнения не съществува. Могат да се обособят редица частни случаи и да се използват съответни методи, базиращи се на общата или специфичната им информация.

1.1. $p \neq 0$ и $q = 0$ (или $p = 0$ и $q \neq 0$). В случая уравнението има вида: $a^{f(x)} = k$, където $k = \frac{r}{p}$ и $a > 0,\ a \neq 1$.

1.1.1. Нека $k > 0$. Методът за решаване се състои в свеждане до решаване на непоказателно уравнение като се използва определението за логаритъм: $a^{f(x)} = k \Leftrightarrow f(x) = \log_a k$ или като се логаритмуват двете страни на даденото уравнение при основа a.

Пример 1. Да се реши уравнението $3^{4x-2} = 7$; Отг. $x = \frac{\log_3 7 + 2}{4}$.

1.1.2. При $k \leq 0$ уравненията от разглеждания вид нямат решение, т.к. за $\forall x\ a^x > 0$.

1.2. $p \neq 0$, $q = -p$, $r = 0$. Това са уравнения от вида: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.

1.2.1. Нека $a = b$, т.е. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, където $a > 0$ и $a \neq 1$.

Свеждането до решаване на непоказателно уравнение става като се използва теоремата: Ако $a > 0,\ a \neq 1$, то уравненията $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$, са еквивалентни.

Пример 2. Да се реши уравнението $2^{x^2-17x+63,5} = 8\sqrt{2}$.

Решение: След представяне дясната страна на това уравнение като степен с основа 2 се получава уравнението $2^{x^2-17x+63,5} = 2^{3,5}$, което е еквивалентно на $x^2 - 17x + 63,5 = 3,5$. Неговите решения, а следователно и на даденото, са $x_1 = 5$ и $x_2 = 12$.

1.2.2. Нека $a \neq b$. Обикновено уравненията от вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ (при $a > 0$ и $a \neq 1$; $b > 0$ и $b \neq 1$; $a \neq b$) се решават чрез логаритмуване на двете им страни при една и съща основа (избираме едно от числата a или b), или се свеждат до уравненията от предходния подслучай чрез тъждеството $b = a^{\log_a b}$. В първия случай се използват еквивалентностите: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a(a^{f(x)}) = \log_a(b^{g(x)}) \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$.

Забележка. При $a \neq b$ и $f(x) \equiv g(x)$ равенството $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ е изпълнено само за $f(x) = 0$.

Пример 3. Да се реши уравнението $3^{2x-1} = 5^{3-x}$; Отг. $x = \frac{3\log_3 5 + 1}{2 + \log_3 5}$.

1.3. Показателни уравнения, решаването на които се свежда до решаване на уравнения от предходните видове.

1.3.1. Уравнения, които се решават чрез полагане. Тук ще разгледаме уравнения от вида $F(a^{f(x)}) = 0$, където $F(a^{f(x)})$ е рационална функция на $a^{f(x)}$, $a > 0,\ a \neq 1$.

Чрез полагането $a^{f(x)} = u,\ u > 0$ се получава познато за учениците алгебрично уравнение $F(u) = 0$. Ако $u_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$ са положителните корени на това уравнение, то решаването на даденото се свежда до решаване на k на брой уравнения от вид $a^{f(x)} = u_i$.

Тук ще разгледаме частни случаи, които след съответното полагане се трансформират в квадратно уравнение. В останалите случаи се постъпва аналогично.

а) Уравнения от вида $\mathrm{A}a^{2f(x)} + \mathrm{B}a^{f(x)} + \mathrm{C} = 0$.

Пример 4. Да се реши уравнението $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$. Уравнението записваме във вида $9.9^x - 3^3.3^x - 486 = 0$. Разделяме двете страни на числото 9, полагаме $3^x = t > 0$ и стигаме до решаване на системата $\left| \begin{array}{l} t^2 - 3t - 54 = 0 \\ t > 0 \end{array} \right.$. Уравнението на системата има корени $t_1 = 9$,

$t_2 = -6$, а самата тя $t = 9$. След решаване на уравнението $3^x = 9$ се получава $x = 2$.

б) Уравнения от вида $pa^{f(x)} + qb^{f(x)} = r$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, където $ab = 1$. Поради $b = \dfrac{1}{a}$ имаме: $pa^{f(x)} + qb^{f(x)} = r \Leftrightarrow pa^{f(x)} + q\dfrac{1}{a^{f(x)}} = r \Leftrightarrow p(a^{f(x)})^2 - ra^{f(x)} + q = 0$.

Пример 5. Да се реши уравнението $(2-\sqrt{3})^x + 3(2+\sqrt{3})^x = \sqrt{13}$.

Решение: Забелязва се, че $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, т.е. $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$. Тогава даденото уравнение при $(2+\sqrt{3})^x = t$ е еквивалентно на $3t^2 - \sqrt{13}t + 1 = 0$, което има корени $t_{1,2} = \dfrac{\sqrt{13}\pm 1}{6} > 0$. Следователно $(2+\sqrt{3})^x = \dfrac{\sqrt{13}\pm 1}{6} \Leftrightarrow x = \log_{2+\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{13}\pm 1}{6}$.

1.3.2. Показателни уравнения, които се решават чрез разлагане по подходящ начин на множители лявата страна на уравнения от вида $F\left(a^{f(x)}, b^{g(x)}\right) = 0$, където F е рационална функция на $a^{f(x)}$ и $b^{g(x)}$.

Ще отбележа, че често използваните начини за разлагане многочлени на множители започват да се изучават още в 7. клас. Особеното тук е, че целенасоченото групиране на събираеми или преобразуването им с цел прилагане на формули за съкратено умножение, водещо до разлагане на множители и другите действия в тази посока, се предхожда от целесъобразно използване на свойствата на степените. Ще се огранича с пример за разлагане чрез групиране и изнасяне на общ множител извън скоби.

Пример 6. Да се решат уравненията:

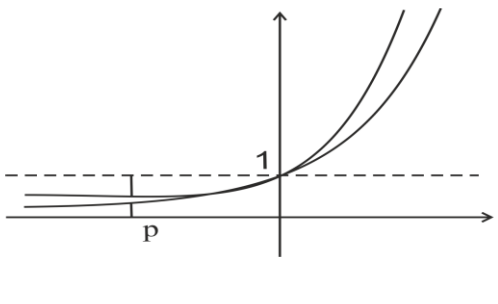
а) $6^x + 15 = 5.2^x + 3^{x+1}$; б) $x^2.2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2.2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

Решение: а) $6^x + 15 - 5.2^x - 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^x.2^x + 15 - 5.2^x - 3.3^x = 0 \Leftrightarrow (3^x.2^x - 5.2^x) + (15 - 3.3^x) = 0 \Leftrightarrow 2^x(3^x - 5) - 3(3^x - 5) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 5)(2^x - 3) = 0 \Leftrightarrow (3^x - 5 = 0$ или $2^x - 3 = 0)$. От първото уравнение получаваме $x_1 = \log_3 5$, а от второто $x_2 = \log_2 3$.

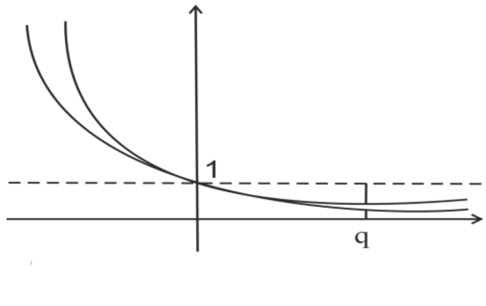
б) След преобразуване на уравнението се получава равносилното му уравнение $(4x^2 - 1)(2^{x-1} - 2^{|x-3|+2}) = 0$. Тогава решения на уравнението са $x = \pm\dfrac{1}{2}$ и всяко $x \in [3, +\infty)$.

II група. Уравнения от вида $a^{f(x)} + b^{f(x)} = c^{f(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$.

Полагаме $f(x) = u$ и нека за определеност да приемем, че тази функция е непрекъсната в **R**. При $c \neq 0$ имаме $\left(\dfrac{a}{c}\right)^u + \left(\dfrac{b}{c}\right)^u = 1 (1)$.



Фигура 1 а).



Фигура 1 б).

Тъй като за всяко $d > 0$, $d^u > 0$, то за да е изпълнено равенството (1) за някаква стойност на u е необходимо за нея $\left(\frac{a}{c}\right)^u < 1$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^u < 1$. Това е възможно само в случаите $\frac{a}{c} > 1$ и $\frac{b}{c} > 1$ (при $u < 0$) или $\frac{a}{c} < 1$ и $\frac{b}{c} < 1$ (при $u > 0$), т.е. ***c*** или е по-малко от a и от b, или е по-голямо от всяко от тях. Тогава графиките на функциите $\left(\frac{a}{c}\right)^u$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^u$ ще имат съответно вида, показан на фигура 1 а) и фигура 1 б).

Очевидно, ако отбелязаните отсечки на чертежите са равни, то числото $p < 0$ е решение на уравнението (1) при $\frac{a}{c} > 1$ и $\frac{b}{c} > 1$, а числото $q > 0$ – при $\frac{a}{c} < 1$ и $\frac{b}{c} < 1$. Лесно се доказва, че уравнението (1) няма други решения. Наистина, например при $\frac{a}{c} > 1$ и $\frac{b}{c} > 1$, функциите $\left(\frac{a}{c}\right)^u$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^u$ са растящи и ако $u < p$, то поради $\left(\frac{a}{c}\right)^u < \left(\frac{a}{c}\right)^p$ и $\left(\frac{b}{c}\right)^u < \left(\frac{b}{c}\right)^p$ ще имаме $\left(\frac{a}{c}\right)^u + \left(\frac{b}{c}\right)^u < \left(\frac{a}{c}\right)^p + \left(\frac{b}{c}\right)^p = 1$.

Аналогично се доказва, че уравнението (1) няма и решения $u > p$, както и, че $u = q$ е единственото му решение в случая $\frac{a}{c} < 1$ и $\frac{b}{c} < 1$.

Забележка. При $\frac{a}{c} < 1$ и $\frac{b}{c} > 1$, ако $u > 0$, то $\left(\frac{b}{c}\right)^u > 1$, а ако $u < 0$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^u > 1$ и значи и в двата случая уравнението (1) няма решение. Аналогично се установява, че и при $\frac{a}{c} > 1$ и $\frac{b}{c} < 1$ уравнението (1) няма решение.

Решаването на изходното уравнение се свежда до решаване на уравнението $f(x) = p$ или $f(x) = q$. Единственият проблем тук е намирането на числата p или q. То става най-често с методи, адекватни на специфичната информация на задачата.

Пример 7. Да се решат уравненията:

а) $\sqrt{3^x} + \sqrt{4^x} = \sqrt{5^x}$; б) $2^{\log_4 x} + 3^{\log_4 x} = \left(\sqrt{13}\right)^{\log_4 x}$; в) $6^x + 10^x = 8^x$.

Решение: а) Полагаме $\frac{x}{2} = u$ и получаваме уравнението $3^u + 4^u = 5^u$. Тъй като числата 3, 4 и 5 са питагорови, то $u = 2$ е решение на последното уравнение, а $x = 2u = 4$ е решение на даденото. Чрез разсъжденията, демонстрирани за общия случай се доказва, че уравнението няма други решения.

б) Полагаме $\log_4 x = u$ и делим двете страни на уравнението на $\left(\sqrt{13}\right)^u$. $\frac{2^u + 3^u}{\left(\sqrt{13}\right)^u} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^u + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^u = 1$. Основите на степените са по-малки от единица, поради което е налице вторият от горните случаи, и значи ако полученото уравнение има решение, то е число $q > 0$. От друга страна q трябва да е такова, че при $u = q$, левите страни на тези равенства трябва да са рационални числа. Следователно q трябва да е четно естествено число. Чрез непосредствена проверка лесно се установява, че u е равно на 2, а уравнението $\log_4 x = 2$ има решение $x = 16$.

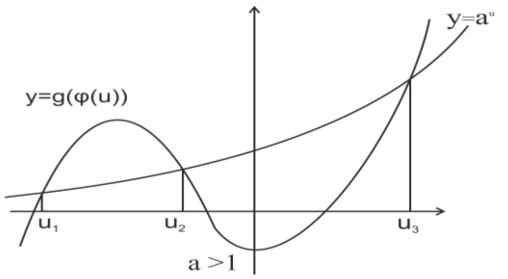
в) Делим двете страни на уравнението на 8^x и получаваме $\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x = 1$.

Съгласно забележката, това уравнение няма решение. Наистина, при $x > 0$, $\left(\frac{5}{4}\right)^x > 1$, при $x < 0$, $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{|x|} > 1$, а при $x = 0$ равенството приема вида 1+1 = 1, което не е вярно.

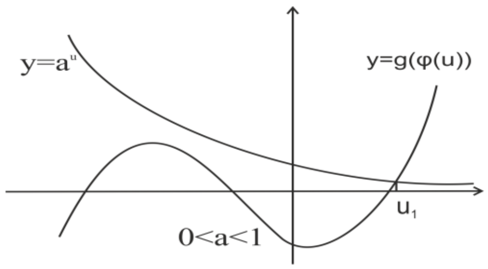
III група. Уравнения от вида $a^{f(x)} = g(x)$, където $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ и $g(x)$ са алгебрични изрази. Очевидно за да има решение уравнение от този вид е необходимо да съществуват стойности на x, за които $g(x)$ приема положителни стойности.

И за този тип уравнения липсва общ метод за решаване. Ще разгледаме случая, когато функцията $f(x)$ е обратима, т.е. след полагането $f(x) = u$ е възможно изразяване на x чрез u: $f(x) = u \Leftrightarrow x = \varphi(u)$. Тогава даденото уравнение приема вида $a^u = g(\varphi(u))$ и ако е възможно скицирането на графиката на функцията $g(\varphi(u))$, то най-често помага графичният метод.

Въз основа на графиките на функциите a^u и $g(\varphi(u))$ (фигура 2 а) и фигура 2 б)) можем да определим броя на корените и техните приближени стойности. Намирането им, както при уравненията от втора група, се основава на специфичната информация на задачите.



Фигура 2 а).



Фигура 2 б).

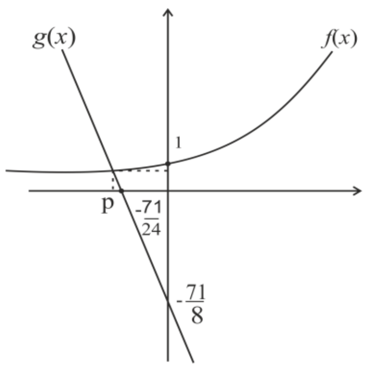
Ще се ограничим с частните случаи – уравнения от вида $a^x = bx + c$; $a^x = bx^2 + cx + d$, когато решенията са целочислени, които са по-често срещани в УКМ.

Пример 8. Да се решат уравненията: а) $2^x = -3x - \frac{71}{8}$; б) $2^x = \frac{4096}{11}x - \frac{4096}{11}$.

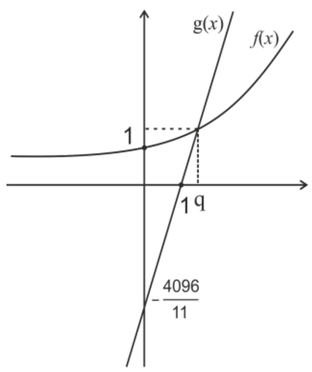
Решение: а) Разглеждаме функциите $f(x) = 2^x$ и $g(x) = -3x - \frac{71}{8}$, графиките на които са представени на фигура 3.

Ясно е, че те се пресичат в една точка и значи уравнението има едно решение, което е по-малко от $-\frac{71}{24}$. Ако решението е цяло число, то може да бъде намерено по следния начин. Нека p е решение, т.е. $2^p = -3p - \frac{71}{8}$. Оттук $p + \frac{2^p}{3} = -\frac{71}{24}$. Тъй като $p < 0$, то $\frac{2^p}{3}$ е правилна положителна дроб. Сега трябва числото $-\frac{71}{24}$ да представим като

сбор от цяло отрицателно число и положителна правилна дроб, т.е. $-\frac{71}{24}=-3+\frac{1}{24}$.
Тогава, ако уравнението има целочислен корен, то той е p = - 3. Непосредствено се проверява, че наистина числото - 3 е корен на уравнението.



Фигура 3.



Фигура 4.

б) Аналогично построяваме графиките на функциите $f(x)=2^x$ и $g(x)=\frac{4096}{11}x-\frac{4096}{11}$ (фигура 4) и констатираме, че уравнението има един корен $q > 1$.

След разсъждения аналогични на тези в а) и проверка се установява, че q =12.

IV група. Уравнения от вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$. Тези уравнения съдържат неизвестното едновременно в основата и степенния показател, и затова се наричат степенно-показателни. Уравненията от вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$ се решават като се разглеждат случаите:

А) Полагаме $f(x) = -1$ и след решаване на това уравнение, проверяваме за кои негови решения уравнението $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$ се превръща във вярно равенство.

Б) Полагаме $f(x) = 0$ и постъпваме както в случай а).

В) Полагаме $f(x) = 1$ и също постъпваме както в случай а).

Г) Решаваме смесената система, получена от: $f(x)>0$; $f(x)\neq 1$ и $g(x)=\varphi(x)$ (значи $f(x)\neq -1$, $f(x)\neq 0$).

Забележка: Тези уравнения се разглеждат само при основа $f(x)>0$ и $f(x)\neq 1$ по дефиниция на степенно-показателния израз $\left[u(x)\right]^{v(x)}=a^{v(x)\log_a u(x)}, a>0, a\neq 1.$)

Търсеното решение е обединението на решенията, получени в **А**), **Б**), **В**) *и* **Г**).

Пример 9. Да се решат уравненията: а) $\left(x+2\right)^{x^2}=(x+2)^{x+1}$; б) $(x-1)^{x^2-5x+4}=1$.

Решение: а) Изчерпваме случаите А), Б), В), Г) и получаваме, че $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_3 = -1$ са всички решения на даденото уравнение.

б) Тук не се разглежда случай, при който основата е равна на 0, защото се получава неопределеност 0^0. Затова ДМ: $x \neq 1$. След изчерпване на случаите А), Б), В) и Г) се получава, че $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 4$ са всички решения на уравнението б).

Литература

Милкоева, Б., Хр. Беева, Д. Беев. Зрелостен и кандидатстудентски курс по математика. София, 2009. с. 40-45

Паскалев, Г., З. Паскалева. Математика 11 клас второ равнище. София, 2002, 149-151.

Портев, Л. и др. Математика, учебно помагало, част алгебра. Пловдив, 2003, 118-124.