I. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПРОЦЕНТИ

В икономическите и статистическите разчети, а също и в много дялове от науката, е прието, части от величини да се изразяват с проценти (стотни). Това има много удобства, тъй като изразяване на дроби с един и същ знаменател (сто) позволява бързо да се сравняват дробите, опростяват се разчетите и в същото време се постига достатъчна степен на точност (в тези случаи, когато измерването в десети е прекалено грубо, а измерването в хилядни – излишно точно).

Най-често процентите се използват във финансовите разчети (банково дело, доходи от облигации, кредити и депозити), в макроикономиката (ръст на брутния продукт, инфлация, безработица), демографията (ръст на населението) и др.

Във финансовите разчети числото, показващо какъв процент от дохода в установения срок (най-често година) носи една или друга сума се нарича лихвен процент, а самият доход от него – лихва. Различават се два основни вида лихва – проста и сложна.

Ако процентите се начисляват върху основната (начална) сума, то говорим за проста лихва. В случай, че процента се начислява върху сумата, включваща основната сума и лихвата, начислена за предишен период, то става дума за сложна лихва.

Означаваме:

B – основна (начална) сума;

t – време, след чието изтичане се начислява лихвата;

p – лихвен процент, който се начислява след изтичането на период от времето t;

P – лихвата за целия период от времето;

T- целия период от времето;

$n = T/t$ – брой на лихвените начислявания;

S – обща сума, която се получава след изтичане на целия период от време T.

Тогава

$$B\frac{p}{100} - \text{лихвата за един период на начисляване;}$$

$$P = Bn\frac{p}{100}$$

$$S = B + P = B + Bn\frac{p}{100} = B\left(1 + \frac{np}{100}\right) - \text{формула за простата лихва}$$

Тази формула означава, че общата сума се изменя по закона на аритметичната прогресия, където основата B е началния член, а разликата е $Bp/100$. Величината

$1+\frac{np}{100}$ е множител на нарастване на основната сума след n лихвени начислявания. При това S е линейна функция от n (при постоянно p). Наличието на функционална зависимост $S(n)$ може да се означи като S_n – сумата, получаваща се след n на брой начислявания на проста лихва.

Метода на сложната лихва означава, че лихвата, начислена през първия период от време t, т.е. $B\frac{p}{100}$ се прибавя към основата и получената сума

$$S_1 = B + B\frac{p}{100} = B\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

служи за начисляване на лихва през втория период от време t. Тогава ще имаме

$$S_2 = B\left(1+\frac{p}{100}\right) + B\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = B\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Аналогично, за третият период от време t:

$$S_3 = B\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 + B\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\frac{p}{100} = B\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

Окончателно за целия период от време на начисляване на лихва T (след n на брой лихвени начислявания) получаваме

$$S_n = B\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - \text{формула за сложната лихва.}$$

Горната формула означава, че при сложната лихва общата сума след n на брой лихвени начислявания се изменя по закона на геометричната прогресия с начален член B и частно $1+\frac{p}{100}$. Величината $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ е множител на нарастване на основната сума след n лихвени начислявания.

Периодични вноски, рента и погасяване на дълг

Има влогове, при които на всеки период на олихвяване се прави определена вноска, която се прибавя към наличната сума и се олихвява заедно с нея следващия период.

Ако в продължение на n периода (години, месеци) се внася в банка една и съща сума V при сложна лихва за периода $p\%$, **какъв капитал ще се натрупа след изтичането на *n*-те периода**? Сумата, която се внася, се нарича **периодична вноска**.

Нека началния капитал е в размер K. След изтичане на първия период този капитал се олихвява и се получава Kq (положили сме $q = 1+\frac{p}{100}$) и към това се прибавя вноската V, така че ще имаме

$$K_1 = Kq + V.$$

При изтичане на втория период се олихвява сумата K_1 и отново се добавя вноската V, така че получаваме

$$K_2 = K_1 q + V = (Kq + V)q + V = Kq^2 + V(q+1) = Kq^2 + V\frac{q^2-1}{q-1}.$$

За третия период на олихвяване ще имаме

$$\begin{aligned} K_3 = K_2 q + V = \big(Kq^2 + V(q+1)\big)q + V = Kq^3 + V(q^2+q+1) \\ = Kq^3 + V\frac{q^3-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Индукционното предположение е

$$K_n = Kq^n + V\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Допускаме, че горното тъждество е вярно. Тогава за K_{n+1} ще имаме

$$\begin{aligned} K_{n+1} = K_n q + V = \left(Kq^n + V\frac{q^n-1}{q-1}\right)q + V = Kq^{n+1} + V\left(\frac{q(q^n-1)}{q-1} + 1\right) \\ = Kq^{n+1} + V\left(\frac{q^{n+1}-q+q-1}{q-1}\right) = Kq^{n+1} + V\frac{q^{n+1}-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Възможно е срещу предварително вложен капитал при дадена лихва периодично да се получава определена сума. Тази сума се нарича **рента**.

Рентата се разглежда като вноска с отрицателен знак, т.е. $R = -V$. Тогава получаваме следната формула капитал с изплащане на рента

$$K_n = Kq^n - R\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Много често при внасяне на определена сума рентата се изплаща до изчерпването ѝ. Тогава за някое n ще имаме $K_n = 0$ и от горната формула се получава следната връзка между величините на рентата и началния капитал:

$$R = K\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}.$$

При отпускане на кредит горната задача се „преобръща“: предоставеният от лицето капитал K се превръща в отпуснатия от банката заем, а рентата R – в погасителна вноска V, следователно в сила е формулата

$$V = K\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}.$$

Дисконтиране

Идеята за дисконтиране се основава на убеждението, че определена сума пари сега има по-голяма стойност от същата сума, но след време. Това се дължи както на инфлацията, така и на други фактори, свързани с риск. Нека П е определена сума пари, които ще се получат след 1, 2, …, n години, тогава

$$\frac{П}{1+\sigma}, \frac{П}{(1+\sigma)^2}, \dots, \frac{П}{(1+\sigma)^n}$$

са дисконтираните суми с коефициент на дисконтиране σ. Те определят сегашната стойност на бъдещите парични постъпления. Коефициентът на дисконтиране σ е субективен – колкото той е по-голям, толкова повече „олекват“ бъдещите пари.

Ако за един проект са необходими вложения K_0, а очакваните приходи през следващите години са $П_1$,$П_2$,…,$П_n$, а σ е коефициента на дисконтиране (например лихвения процент на фирмените кредити), то тогава

$$PV = \frac{П_1}{(1+\sigma)} + \frac{П_2}{(1+\sigma)^2} + \cdots + \frac{П_n}{(1+\sigma)^n}$$

се нарича сегашна стойност на приходите на фирмата от реализацията на проекта. Коефициентът на Тобин за този проект се пресмята като частно от PV и K_0:

$$q = \frac{PV}{K_0}.$$

При $q > 1$ ще считаме проекта за рентабилен и подлежащ на реализация, а при $q \leq 1$ – проекта е нерентабилен. Ако вложенията, необходими за реализацията на всички рентабилни проекти надхвърля обема на капитал, който фирмата може да подсигури, всички рентабилни проекти се подреждат по низходящ ред според коефициентите си и се реализират тези с най-високи коефициенти на Тобин.

Към икономическите показатели, в които ще става дума в задачите от този раздел се отнасят:

N – количеството продукция (обем на произведената и реализирана продукция) в натурално изражение;

C – пълните разходи за производството и реализацията на продукцията в парично изражение;

$S = C/N$ – себестойността на единица произведена продукция;

M – пазарна цена за единица реализирана продукция;

MN – общи приходи от реализацията на продукцията;

$П = MN - C$ – печалба от дейността на предприятието.

$R = \frac{\text{П}}{C} 100$ – рентабилност на предприятието. Рентабилността (в %) се счита за един от най-важните икономически показатели на стопанска дейност.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯ

Задача 1. Някой иска да открие депозит в банка в размер на 10000 лв. Годишният лихвен процент по депозитите на банката е 5%. Да се анализира ръста на спестяванията при проста и сложна лихва за десетгодишен период.

Решение:

Пресмятанията извършваме по съответните формули за $B = 10000$, $p = 5$ и $n = 1,2, \dots ,9,10$. Резултатите нанасяме в таблица

n	Проста лихва	Сложна лихва
1	10500	10500
2	11000	11025
3	11500	11576,25
4	12000	12155,06
5	12500	12762,82
6	13000	13400,96
7	13500	14071,01
8	14000	14774,56
9	14500	15513,29
10	15000	16288,95

Вижда се, че докато в началото сумите са еднакви, то в края печалбата от сложната лихва възлиза на 1288,95 лв.

Задача 2. Мирослава разполага със сума от 5000 лв., които желае да вложи в банка за срок от една година. От банката ѝ предлагат четири възможности:

1. Ежемесечно олихвяване с лихвен процент 1%;
2. Олихвяване на всяко тримесечие с лихвен процент 3,1%;
3. Олихвяване на всяко полугодие с лихвен процент 6,4%;
4. Олихвяване на края на годината с лихвен процент 13%.

Кой от горните варианти за депозит да избере Мирослава?

Решение:

Извършваме пресмятанията по формулата за сложна лихва при $B = 5000$, като в първия вариант $p = 1$, $n = 12$; във втория - $p = 3{,}1$, $n = 4$; в третия - $p = 6{,}4$, $n = 2$ и в четвъртия - $p = 13$, $n = 1$. Получаваме

$$S_I = 5000\left(1+\frac{1}{100}\right)^{12} = 5634{,}13;$$

$$S_{II} = 5000\left(1+\frac{3{,}1}{100}\right)^{4} = 5649{,}43;$$

$$S_{III} = 5000\left(1+\frac{6{,}4}{100}\right)^{2} = 5660{,}45;$$

$$S_{IV} = 5000\left(1+\frac{13}{100}\right)^{1} = 5650.$$

Вижда се, че най-голяма сума на края на годината се получава при третия вариант на олихвяване, така че бихме посъветвали Мирослава да избере него.

Задача 3. Стефан и Николай имали съответно 5000 лв. и 6000 лв. и решили да си открият дългосрочни депозити в банка. Стефан отишъл в банка „АЛФА“, където му предложили да получи 7000 лв. след 6 години, а Николай получил оферта от банка „БЕТА“ – 8000 лв. след 5 години. Какви са годишните лихвени проценти на двете банки и в коя от тях е по-изгодно да се открие депозит?

Решение:

Ще намерим годишния лихвен процент на банка „АЛФА“ по два различни начина. И при двата ще използваме формулата за сложна лихва при $B = 5000$, $n = 6$ и $S_6 = 7000$. Ще имаме

$$7000 = 5000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{6}$$

Първи начин: последователно получаваме

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{6} = \frac{7000}{5000} = 1{,}4 \Longrightarrow 1+\frac{p}{100} = \sqrt[6]{1{,}4} \Longrightarrow p = 100\left(\sqrt[6]{1{,}4}-1\right) = 5{,}768.$$

Втори начин: логаритмуваме (при основа 10) равенството

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{6} = 1{,}4,$$

получаваме

$$6\log_{10}\left(1+\frac{p}{100}\right) = \log_{10}1{,}4 \Longrightarrow \log_{10}\left(1+\frac{p}{100}\right) = \frac{\log_{10}1{,}4}{6} = 0{,}0244,$$

следователно

$$1 + \frac{p}{100} = 10^{0,0244} = 1,05778 \ \text{ и } \ p = 5,778.$$

Разликата между двата резултати идва от грешки при закръгляне.

Аналогични са пресмятанията за банка „БЕТА“. Ще имаме

$$8000 = 6000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5.$$

По първия начин получаваме

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = \frac{8000}{6000} = 1,33 \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{1,33} \Rightarrow p = 100\left(\sqrt[5]{1,33} - 1\right) = 5,869.$$

По втория

$$5\log_{10}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1,33 \Rightarrow \log_{10}\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{\log_{10} 1,33}{5} = 0,0248 \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = 10^{0,0248} = 1,05877 \ \text{ и } \ p = 5,877.$$

Както се вижда, банка „БЕТА“ дава по-висока лихва и, следователно и двамата ще вложат парите си в нея.

Задача 4. Емил вложил сума от 12000 лв. в банка с определен годишен лихвен процент, а Георги вложил 10000 лв. в друга банка, като годишният лихвен процент бил с 50% по-голям от този на Емил. След 12 год. сумите по депозитите на Емил и Георги се изравнили. Какви са лихвените проценти и какви са сумите по депозитите на Емил и Георги на края на дванадесетгодишния период?

Решение:

Нека с p да означим лихвения процент по депозита на Емил, тогава лихвения процент по депозита на Георги ще бъде $1,5p$. Означаваме $r = p/100$. След 12 год. капиталът на Емил възлиза на

$$K_E = 12000(1 + r)^{12},$$

а капиталът на Георги –

$$K_G = 10000(1 + 1,5r)^{12}.$$

Тъй като двата капитал се изравняват, то от $K_E = K_G$ получаваме уравнението

$$12000(1 + r)^{12} = 10000(1 + 1,5r)^{12} \text{ или } 1,2(1 + r)^{12} = (1 + 1,5r)^{12}.$$

Разделяме двете страни на уравнението на $(1+r)^{12}$ и получаваме

$$\left(\frac{1+1{,}5r}{1+r}\right)^{12} = 1{,}2 \Longrightarrow \frac{1+1{,}5r}{1+r} = \sqrt[12]{1{,}2} = 1{,}0153.$$

Тогава получаваме следното уравнение с неизвестно r:

$$1{,}0153 + 1{,}0153r = 1 + 1{,}5r \Longrightarrow (1{,}5 - 1{,}0153)r = 0{,}0153 \Longrightarrow r = \frac{0{,}0153}{0{,}4847} = 0{,}03363.$$

Тогава лихвения процент по депозита на Емил ще бъде 3,363%, а този по депозита на Георги – 5,045%. При тези лихвени проценти за капиталите ще имаме

$$K_E = 12000(1{,}03363)^{12} = 17847;\ K_G = 10000(1{,}05045)^{12} = 18051.$$

Грешката идва от закръглянето.

Задача 5. Какъв ще бъде крайния размер на капитала след 8 год., при положение, че началния му размер е 500000 лв., годишният лихвен процент е 4%, а годишната вноска – 50000 лв.?

Решение:

Във формулата за капитал с периодична вноска полагаме $K = 500$, $q = 1{,}04$, $V = 50$ и $n = 8$. Получаваме (паричните единици са в хил. лв.):

$$K_8 = 500(1{,}04)^8 + 50\frac{(1{,}04)^8 - 1}{1{,}04 - 1} = 684{,}28 + 50\frac{0{,}369}{0{,}04} = 684{,}28 + 460{,}71 = 1145.$$

Следователно, крайният размер на капитала ще бъде 1145000 лв.

Задача 6. При навършване на пълнолетие (21 год.) Каролина получава наследство в размер на 5 млн. \$. Тя смята, че сума от 100 хил. \$ годишно е напълно достатъчна за покриване на всички нейни разходи. а) Колко капитал би останал на Каролина след 50 год., ако годишната ѝ рента е в размер на 100 хил. \$, а годишният лихвен процент е 3%? б) В какъв размер трябва да бъде рентата, ако Каролина иска след 50 години отново да разполага с капитал от 5 млн. \$? в) Какъв трябва да бъде годишния размер на рентата, ако се предполага пълно изчерпване на капитала за 50 год.? г) При какви размери на рентата R капитала на Каролина може да бъде изчерпан за определен период от време? д) За колко години ще се изчерпи капиталът на Каролина при рента от 160 хил. \$? А при 180 хил. \$?

Решение:

а) Заместваме във формулата за капитал с периодична рента $K = 5000$ (ще пресмятаме в хил. \$), $R = 100$, $n = 50$ и $q = 1{,}03$. Получаваме

$$K_{50} = 5000(1{,}03)^{50} - 100\frac{(1{,}03)^{50} - 1}{1{,}03 - 1} = 21919{,}53 - 100\frac{3{,}3839}{0{,}03}$$
$$= 21919{,}53 + 11279{,}69 = 10639{,}84.$$

Вижда се, че капитала на Каролина след 50 год. ще възлиза на 10, 63984 млн. \$, а тя е изхарчила 5 млн. \$.

б) Ще трябва да решим уравнението

$$K_{50} = 5000 = 5000(1{,}03)^{50} - R\frac{(1{,}03)^{50} - 1}{1{,}03 - 1} \Leftrightarrow 5000 = 21919{,}53 - R \cdot 112{,}8$$
$$\Leftrightarrow R = \frac{21919{,}53 - 5000}{112{,}8} = 150,$$

значи в този случай Каролина ще може да разчита на рента от 150 хил. \$ годишно.

в) Ще трябва да решим уравнението

$$K_{50} = 0 = 5000(1{,}03)^{50} - R\frac{(1{,}03)^{50} - 1}{1{,}03 - 1} \Leftrightarrow 0 = 21919{,}53 - R \cdot 112{,}8 \Leftrightarrow R$$
$$= \frac{21919{,}53}{112{,}8} = 194{,}322.$$

г) За да се изчерпи капитала на Каролина трябва за някаква стойност на n да е изпълнено равенството

$$K_{50} = 0 = 5000(1{,}03)^{n} - R\frac{(1{,}03)^{n} - 1}{1{,}03 - 1} \Leftrightarrow 150(1{,}03)^{n} = R((1{,}03)^{n} - 1)$$
$$\Leftrightarrow (1{,}03)^{n} = \frac{R}{R - 150} \Rightarrow R > 150.$$

И наистина при рента $R = 150$ всяка година се тегли лихвата и капиталът на Каролина остава непроменен, при $R < 150$, поради това, че рентата е по-малка от лихвата капиталът нараства, а при $R > 150$ – намалява (до изчерпване).

д) След логаритмуване на последното равенство получаваме

$$n = \frac{\log_{10}\frac{R}{R - 150}}{\log_{10} 1{,}03} = 77{,}9\log_{10}\frac{R}{R - 150}.$$

При $R = 160$ получаваме

$$n = 77{,}9\log_{10}\frac{160}{160 - 150} = 77{,}9\log_{10} 16 = 93{,}8,$$

а при $R = 180$:

$$n = 77{,}9 \log_{10} \frac{180}{180 - 150} = 77{,}9 \log_{10} 6 = 60{,}6.$$

Задача 7. Николай възнамерява да тегли банков заем при договорена месечна лихва от 0,5%. а) Той е преценил, че максималната месечна погасителна вноска трябва да бъде 200 лв., а максималния срок за погасяване на заема – 7 год. Какъв максимален кредит може да поиска от банката Николай? б) Ако все пак Николай се спре на кредит от 12000 лв. С погасителна вноска от 200 лв., то за какъв период от време ще бъде погасен кредита?

Решение:

а) Заместваме във формулата $q = 1{,}005$, $V = 200$ и $n = 84$, тогава получаваме

$$200 = K \frac{(1{,}005)^{84}(1{,}005 - 1)}{(1{,}005)^{84} - 1} \Leftrightarrow 200 = K \frac{1{,}52 \cdot 0{,}005}{1{,}52 - 1} \Leftrightarrow 200 = 0{,}0146K \text{ и } K = 13700.$$

Така получаваме, че при тези параметри, максималният възможен кредит възлиза на 13700 лв.

б) Заместваме $K = 12000$ и $V = 200$ и трябва да определим n. Ще имаме

$$200 = 12000 \frac{(1{,}005)^{n}(1{,}005 - 1)}{(1{,}005)^{n} - 1} \Leftrightarrow 200 = 60 \frac{(1{,}005)^{n}}{(1{,}005)^{n} - 1}.$$

Това води до уравнението

$$10(1{,}005)^n - 10 = 3(1{,}005)^n \quad \text{и} \quad (1{,}005)^n = \frac{10}{7}.$$

Логаритмуваме и получаваме

$$n \log_{10} 1{,}005 = \log_{10} \frac{10}{7} = \log_{10} 10 - \log_{10} 7 = 1 - \log_{10} 7 \Longrightarrow n = \frac{1 - \log_{10} 7}{\log_{10} 1{,}005} = \frac{1 - 0{,}845}{0{,}002167} = 71{,}5.$$

Тъй като броят на месеците трябва да бъде цяло число, то Николай ще изтегли кредит за 6 год. ($n = 72$). Тогава погасителната месечна вноска ще възлиза на

$$V = K \frac{q^n(q - 1)}{q^n - 1} = 12000 \frac{(1{,}005)^{72}(1{,}005 - 1)}{(1{,}005)^{72} - 1} = 60 \frac{1{,}432}{1{,}432 - 1} = 198{,}89 \text{ лв.}$$

Задача 8. Според Георги 200 лв. след 10 год. се равняват на 100 лв. сега. а) Пресметнете субективния коефициент на дисконтиране за Георги. б) На колко сегашни лв. ще се равняват за Георги 300 лв. след 15 год.?

Решение:

а) Замествайки във формулата за дисконтиране получаваме

$$\frac{200}{(1+\delta)^{10}} = 100 \text{ или } \frac{2}{(1+\delta)^{10}} = 1.$$

Логаритмуваме последното равенство:

$$\log_{10} 2 - 10\log_{10}(1+\delta) = \log_{10} 1 = 0 \Rightarrow \log_{10}(1+\delta) = \frac{\log_{10} 2}{10} = 0{,}03.$$

Тогава получаваме, че

$$1+\delta = 10^{0,03} = 1{,}0715 \Rightarrow \delta = 0{,}0715 = 7{,}15\%.$$

б) Сега можем да използваме получения в а) коефициент на дисконтиране и да дисконтираме 300 за период от 15 год., получаваме

$$\frac{300}{(1+\delta)^{15}} = \frac{300}{(1{,}0715)^{15}} = \frac{300}{2{,}818} = 106{,}46.$$

Можем да решим задачата и без да използваме δ. Означаваме неизвестната величина с x. Тогава ще имаме

$$x = \frac{300}{(1+\delta)^{15}} = \frac{200 \cdot 1{,}5}{(1+\delta)^{10}(1+\delta)^{5}} = \frac{100 \cdot 1{,}5}{(1+\delta)^{5}}$$

(за последното равенство сме използвали условието на задачата). Сега вдигаме в квадрат последното равенство:

$$x^2 = \frac{10000 \cdot 2{,}25}{(1+\delta)^{10}} = \frac{200 \cdot 50 \cdot 2{,}25}{(1+\delta)^{10}} = 100 \cdot 50 \cdot 2{,}25 = \frac{100 \cdot 100 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5}{2}.$$

След коренуване получаваме

$$x = \frac{150}{\sqrt{2}} = \frac{150}{1{,}414} = 106{,}07.$$

Задача 9. В една компания се разглеждат пет инвестиционни проекта, за които началните капиталовложения и очаквани приходи през следващите пет години са както следва:

	K_0	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A	100000	24000	24000	24000	24000	24000
B	100000		31000	31000	31000	31000
C	100000			42000	42000	42000
D	100000				64000	64000
E	100000					130000

Да се извърши дисконтиране на бъдещите приходи при дисконтен процент 5%. В кои проекти да се инвестира, при положение, че компанията има възможност да инвестира 200000?

Решение:

Очакваните приходи от първата година разделяме на 1,05, от втората – $1{,}05^2=1{,}1025$, от третата – $1{,}05^3=1{,}1576$, от четвъртата – $1{,}05^4=1{,}2155$ и от петата – $1{,}05^5=1{,}2763$. Получаваме следните дисконтирани приходи

	K_0	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A	100000	22857	21769	20732	19745	18805
B	100000		28118	26779	25504	24289
C	100000			36281	34554	32908
D	100000				52653	50146
E	100000					101858

Сега пресмятаме сегашните стойности на приходите:

$$PV_A = 22857 + 21769 + 20732 + 19745 + 18805 = 103908$$

$$PV_B = 28118 + 26779 + 25504 + 24289 = 104660$$

$$PV_C = 36281 + 34554 + 32908 = 103743$$

$$PV_D = 52653 + 50146 = 102799$$

$$PV_E = 101858$$

и коефициентите на Тобин за проектите:

$$q_A = \frac{PV_A}{K_{0_A}} = \frac{103908}{100000} = 1{,}03098;\ q_B = \frac{PV_B}{K_{0_B}} = \frac{104660}{100000} = 1{,}0466;\ q_C = \frac{PV_C}{K_{0_C}} = \frac{103743}{100000} = 1{,}03743;\ q_D = \frac{PV_D}{K_{0_D}} = \frac{102799}{100000} = 1{,}02799;\ q_E = \frac{PV_E}{K_{0_E}} = \frac{101858}{100000} = 1{,}01858.$$

Тъй като $q_B > q_A > q_C > q_D > q_E > 1$, то всички проекти са рентабилни, но ако трябва да се ограничим в рамките на 200000, то ще изберем проектите B и A. Да отбележим, че приходите от проектите без дисконтиране са най-големи при E (130000), след това – D (128000), C (126000), B (124000) и накрая A (120000).

Задача 10. Подобряването на организацията на производство води до увеличаване на производителността на труда на един работник с $a\%$, а внедрено в последствие рационализаторско предложение – с $b\%$. С колко процента ще се повиши производителността на труда в сравнение с първоначалната? Да се разработи икономико-математически модел и да се анализира модела на базата на конкретни данни $a = 10$ и $b = 20$.

Решение:

Ще разглеждаме производителността на труда на един работник като броя на произведените от него изделия за единица време (ден, седмица или месец). Допускаме, че първоначалната производителност е била A. Увеличената производителност за сметка на по-добрата организация на труда ще бъде $A \cdot a : 100$, а самата производителност ще стане

$$A + A\frac{a}{100} = \left(1 + \frac{a}{100}\right)A.$$

Изменението на производителността на труда за сметка на внедряване на рационализаторското предложение ще бъде

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)A\frac{b}{100},$$

а самата производителност става равна на

$$\left(1 + \frac{a}{100}\right)A + \left(1 + \frac{a}{100}\right)A\frac{b}{100} = \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)A.$$

(Лесно се вижда, че горната формула съвпада с формулата за сложния процент при двукратно начисляване и при $a = b$.)

Относителното повишаване на производителността, изчислено в проценти ще бъде равно на

$$\frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)A - A}{A}100\% = \left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\%.$$

Този израз се явява икономико-математически модел на повишаване на производителността на труда с $a\%$, а след това – с $b\%$.

При $a = 10$ и $b = 20$ производителността се увеличава с

$$\left(a + b + \frac{ab}{100}\right)\% = \left(10 + 20 + \frac{10 \cdot 20}{100}\right)\% = 32\%.$$

Както при сложната лихва, освен сумирането на процентите $10 + 20 = 30\%$ допълнително се начислява процент от процента: 10% от 20% е 2%.

НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. Един товар с включен транспорт струва 3900 лв. Какъв процент от стойността на товара съставлява транспорта, ако цената на товара без включен транспорт е 3432 лв.?

2. Стойността на едно новопостроено жилище е 98000 лв., като от тях 65% са заплатили за материали, а останалите – за труд. Колко са заплатили за труд?

3. По време на промоция от 15% в една верига магазини цената на кутия шоколадови бонбони от популярна марка е била 3,06 лв. каква е цената на бонбоните без промоцията?

4. В резултат от инфлацията една стока поскъпнала с 12% през първата година и с 8% през втората. С колко процента е поскъпнала стоката през двете години?

5. В една държава, в следствие на инфлацията цените на тока нараснали с 300%. Опозицията иска от мнозинството да бъдат възстановени старите цени на тока. С колко процента трябва да поевтинее тока?

6. В една транспортна фирма има две автоколони. Броят на автомобилите във втората автоколона е с 30% по-голям отколкото в първата, а товароподемността на автомобилите от втората автоколона надвишава с 10% товароподемността на автомобилите от първата. С колко процента средната за транспортната фирма товароподемност е по-малка от товароподемността на автомобилите от втората автоколона?

7. През 2014 год. в шахтата А се добивали 3 пъти повече въглища, отколкото в шахтата Б. През следващите две години добивът на въглища в шахтата А нараствал с $p\%$ годишно, а в шахтата Б намалявал със същия процент. Да се определи p ако през 2016 год. добива на въглища в шахтата А е станал 15 пъти по-голям, отколкото в шахтата Б.

8. След реконструкция на поточна линия в един завод нейната производителност за един работен ден нараснала с 60%, консумацията на електроенергия намаляла с 20%, но цената на електроенергията за 1 квт се повишила с 40%. С колко процента се понижил разхода за електроенергия за единица произведена продукция?

9. Николина открила депозит от 3900 лв. при 5% годишна лихва, като всяка година правела допълнителна вноска от една фиксирана сума. След седем години се оказало, че депозитът ѝ се е увеличил със 75%. Какъв е размерът на годишната вноска?

10. Николай получил наследство (от починала богата леля в Америка) сумата от 400000$, която вложил в банка при 6% годишна лихва, като всяка година (след олихвяването) теглел една и съща сума, с която се издържал. След десет години

установил, че парите са намалели с 12,5%. Какъв е размерът на годишната рента на Николай?

11. След колко години сумата по влог от 100000 лв. при 20% годишна лихва ще стане по-голяма от сумата по влог от 200000 лв. при 10% годишна лихва?

12. Колко години са нужни за да може сумата по влог от 20000 лв. при 4% годишна лихва да надхвърли 50000 лв.?

13. Каква минимална сума трябва да се вложи при годишна лихва от 7%, за да може след седем години да се разполага с поне 70000 лв.?

14. Данък сгради в една община се плаща до 15 септември, а след това се начислява глоба в размер на 0,1% дневно от дължимия данък. Надежда платила данъка си на 7 февруари следващата година, като общата сума възлизала на 490,06 лв. – данък плюс начислената глоба. Каква сума би платила Надежда, ако плащането е извършено на 22 ноември (същата година)?

15. Данък сгради в една община се изчислява така: за жилищна площ – по 1,20 лв. на кв. м.; за търговска площ – с 50% отгоре; за гараж – 20% отстъпка от цената за жилищна площ, а за таванско помещение – отстъпката е от 40%. Данъкът се плаща до 15 септември в установения размер, а след това – по 0,1% дневно върху него – глоба за просрочване. Стоян разполагал с апартамент от 88 кв. м., магазин – 15 кв. м., гараж – 12 кв. м. и таванско помещение – 10 кв. м. Той отишъл на 22 декември, като разполагал с 200 лв. след като платил дължимия данък плюс глобата, той, с останалите пари купил от съседния хипермаркет бадеми по 16,92 лв. за кг. Колко бадеми е закупил Стоян?

16. Двама работници извършват една работа за a дни. За колко дни ще свърши първият работник работата сам, ако производителността на втория работник е по-голяма с $b\%$ от неговата? Решете задачата в общия случай и за $a = 20$, $b = 5$.

17. Оборота на един магазин нараства с един и същ среден годишен процент. Ако годишния процент на нарастване се увеличи с $a\%$, то след две години оборота на магазина ще бъде b пъти по-голям, отколкото би бил без това увеличение. Определете средния годишен процент на нарастване (без увеличението). Решете задачата в общия случай и за $a = 10{,}5$, $b = 1{,}21$.

18. В началото на годината са внесени на депозит a лв. и след олихвяване след една година са изтеглени b лв. Какъв е годишния лихвен процент, ако след две години в спестовната сметка (след олихвяване) има c лв. Решете задачата в общия случай и за $a = 1600$, $b = 848$ и $c = 424$.

19. Две бригади, състоящи се от 10 и 15 работника съответно изработват a на брой детайла общо за една смяна. След увеличаване на производителността на труда с

$c\%$ на работниците от първата бригада и с $d\%$ на работниците от втората бригада, започнали да произвеждат общо b на брой детайла за една смяна. Да се пресметне месечната заплата на всеки от работниците след увеличението на производителността, ако един детайл се заплаща по 2 лв. и месецът има 22 работни дни. Решете задачата в общия случай и за $a = 620$, $b = 702$, $c = 20$ и $d = 10$.

20. В първата година на разработването на едно нефтено находище, от него се добивали 400 хил. т. нефт, а след това в продължение на няколко години добивът нараствал с 50% годишно, а след това – девет години добивът не се променял. Колко години е експлоатирано това нефтено находище, ако общо в него са добити 35, 65 млн. т. нефт?

21. Една стока поевтиняла на два пъти с по 15%. С колко процента е поевтиняла стоката?

22. Боян закупил две картини за 2250 лв., а ги продал с 40% печалба. Колко е струвала всяка от картините, ако от първата е спечели 25%, а от втората – 50%?

23. Стойността на 60 екземпляра от първия том и 70 екземпляра от втория е 270$. В действителност за всички тези томове книжарницата получила 237$, защото направила отстъпка от 15% за първия том и 10% за втория. Да се намери първоначалната цена на книгите.

24. Една стока струвала 50 лв. Първата година тя поскъпнала с някакъв процент, а втората поевтиняла със същия процент. Да се определи този процент, ако на края стоката струвала 48 лв.

25. Известно е, че сума, внесена в началото на годината нараства в края на годината с определен процент (различен за различните банки). 60% от определена сума е вложена в първата банка, а останалите пари – във втората. След една година общата сума е 6456 лв., а след две – 6946,8 лв. Ако 60% са били вложени във втората банка, то сумата на края на първата година би била 6444 лв. Каква би била сумата след края на втората година, ако всички пари бяха вложени в банката, предлагаща по-висок лихвен процент?

26. Общата стойност на 1 кг. От една стока и 10 кг. От друга е 200 лв. След като първата стока поевтиняла с 15%, а втората поскъпнала с 35%, общата стойност на същите количества от двете стоки станала 182 лв. Колко струва килограм от всяка от стоките?

27. Майката на Лили я помолила да отиде в близкия супермаркет и да купи половин кг. филе Елена, 2 кутии шоколадови бонбони и 4 кг. банани. Майката пресметнала, че за покупката са необходими точно 45 лв., които дала на Лили. Като отишла в магазина, Лили забелязала, че всички тези стоки са с различни цени

– филето било с 20% по-евтино, бонбоните – с 8% по-евтини, а бананите с 4% по-скъпи. Тя веднага пресметнала, че ако купи тези стоки в количествата, указани от майка ѝ, ще спести 4,80 лв. тя купила филето в количество с 30% по-голямо от предвиденото, а другите стоки – както казала майката. На касата платила точно 45 лв. и се прибрала в къщи. Какви са били цените на стоките?

II. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Много задачи с икономическо съдържание имат достатъчно прости математически модели, изразяващи се с алгебрични уравнения от първа или втора степен. Основната трудност, възникваща при решаването на такива задачи е построяването на самия математически модел – избор на неизвестното и записване на условието на задачата във формализиран вид. От това, колко удачно е избрана неизвестната величина, зависи трудоемкостта, а в някои случай, и възможността за решаване на задачата. Върху разгледаните по-долу решени задачи е илюстрирано как се съставят математически модели, а също така и методиката за решаване на съответните уравнения.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯ

Задача 1. Предприемач взел под аренда земя за четири години, като трябва да плати арендна вноска от A лв. на края на всяка година. Той разполагал с някакъв капитал, който удвоил през първата година и платил арендата. Той удвоил останалия капитал през втората година и платил арендата. По същият начин продължила дейността му през третата и четвъртата година. В резултат на това, в края на четвъртата година, той разполагал с капитал, p пъти по-голям от първоначалния. Постройте математически модел на натрупването на капитала на предприемача и определете величината на първоначалния му капитал в общия случай и при $A = 16000, p = 4$.

Решение:

Означаваме с x количеството капитал, с което предприемачът разполагал в началото. В края на първата година (след изплащането на арендата) предприемачът разполагал с капитал в размер на

$$2x - A,$$

в края на втората година –

$$2(2x - A) - A = 4x - 3A,$$

В края на третата година –

$$2(4x - 3A) - A = 8x - 7A$$

и в края на четвъртата –

$$2(8x - 7A) - A = 16x - 15A.$$

Тъй като този капитал трябва да бъде p пъти по-голям от първоначалния, то получаваме уравнението

$$16x - 15A = px.$$

Това уравнение има смисъл при $p < 16$ и при $16x - 15A > 0$, т.е. $A < \frac{16}{15}x$ (арендата не трябва да превишава $\frac{16}{15}$ от първоначалния капитал). Тогава решението е

$$x = \frac{15A}{16 - p}.$$

При $A = 16000$, $p = 4$ ще имаме

$$x = \frac{15 \cdot 16000}{16 - 4} = 20000.$$

Задача 2. На състоялото се в края на годината събрание на акционерите на някакво акционерно дружество се взело решение относно разпределението на печалбата от 5600000 лв. по следния начин: по-голямата част да се насочи към развитие на предприятието, 25% от тази част да се разпредели като дивиденти на акционерите, а 15% - за социални нужди на работниците. Освен това се решило да бъдат пуснати акции за продажба на фондовата борса в размер на 50% от изплатените дивиденти – 250 обикновени и 100 привилегировани (на стойност с 50% по-висока от обикновените). Определете по колко пари са били разпределени за всяка от дейностите и каква е стойността на емитираните акции.

Решение:

Означаваме с x тази част от печалбата на акционерната компания, която ще се отдели за нейното развитие. Тогава уравнението на математическия модел ще бъде

$$x + 0{,}25x + 0{,}15x = 5600000 \Longrightarrow 1{,}4x = 5600000 \text{ и } x = 4 \text{ млн. лв.}$$

Тогава за дивиденти ще се отделят 25% от $4000000 = 1000000$ лв., а за социалните нужди на работниците - 15% от $4000000 = 600000$.

Сега можем да означим с y стойността на една (обикновена) акция. Тогава можем да запишем уравнението

$$250y + 100 \cdot 1{,}5y = 0{,}5 \cdot 1000000 \Longrightarrow 400y = 500000 \text{ и } y = 1250.$$

Тогава една обикновена акция ще струва 1250 лв., а една привилегирована – 1875 лв.

Задача 3. Компания, търгуваща с петролни продукти зарежда бензиностанциите си с 120000 л бензин (равни количества за всяка от бензиностанциите). В почивните дни 4 от бензиностанциите не работят, а същото количество бензин се разпределя за работещите бензиностанции, като всяка от тях увеличава количеството си с 8000 л (това е капацитетът на всяка от бензиностанциите). С колко бензиностанции разполага петролната компания? Какъв е капацитетът на всяка от тях?

Решение:

През делничен ден работят x на брой бензиностанции (това са всички бензиностанции на компанията), като всяка от тях се зарежда с $120\!:\!x$ хил. л бензин. В почивен ден работят $x-4$ на брой бензиностанции и се зареждат с $120\!:\!(x-4)$ хил. л бензин. От друга страна, бензиностанциите, работещи през почивните дни са заредени с 8 хил. л бензин повече, отколкото през другите дни. Така достигаме до уравнението

$$\frac{120}{x} + 8 = \frac{120}{x-4}.$$

Умножаваме горното уравнение с $x(x-4)$ и получаваме

$$120(x-4) + 8x(x-4) - 120x = 0.$$

След преобразуване, получаваме квадратното уравнение

$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

с корени

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+60} = 2 \pm 8.$$

Коренът $x_1 = 2 - 8 = -6$ няма икономически смисъл, тогава $x = x_2 = 2 + 8 = 10$. Така петролната компания разполага с 10 бензиностанции, от които 6 работят и през почивните дни. Капацитетът на всяка от тях е 120:6=20 хил. л.

Задача 4. Двама предприемачи съвместно придобили 50 т. стока по цена от 10$ за т. Вторият предприемач заплатил за стоката, включително транспорта с 112 $ повече от първия. Превозът на стоката се заплащал по 1$ за 10 т., транспортирани на 100 км., като първият предприемач транспортирал стоката си на 600 км., а вторият – на 800 км. Какви количества от стоката са закупили предприемачите? Колко пари е заплатил всеки от тях за закупуването и транспорта на стоката си?

Решение:

Означаваме с x количеството стока, закупено от първия предприемач, тогава вторият предприемач е закупил $50 - x$ т. от стоката.

$$10 + \frac{1}{10}\frac{600}{100} = 10{,}6\$ \text{ на тон плаща първият за закупуване и превоз;}$$

$$10 + \frac{1}{10}\frac{800}{100} = 10{,}8\$ \text{ на тон плаща вторият за закупуване и превоз.}$$

Тогава общият разход на първия предприемач ще бъде $10{,}6x\$$, а на втория - $10{,}8(50 - x)$. но разликата в разходите на втория и първия е 112$, затова ще имаме

$$10{,}8(50 - x\ ) - 10{,}6x = 112 \Rightarrow 540 - 21{,}4x = 112 \Rightarrow x = 20.$$

Тогава количеството стока на първия е 20 т., а на втория – 30 т. Разходите за първи търговец ще възлизат на $20 \cdot 10{,}6 = 212\$$, а на втория - $30 \cdot 10{,}8 = 324\$$.

НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. За един месец (състоящ се от 24 работни дни) в едно предприятие се произвеждало определено количество бои. След внедряване на нова технология за производството на бои, ежедневното производство нараснало с 2 т. В следствие на това, месечната норма се повишила с 8 т. и се изпълнявала с 4 дни по-рано. С какъв процент се е повишила производителността след внедряването на новата технология?

2. Три строителни компании се договорили да построят даден строителен обект съвместно. Общата сума, която те трябвало да усвоят била 2805000 лв. Първата компания получила половината от парите, заделени за втората компания плюс още 270000 лв. за придобиване на оборудване, а третата – половината от това, което получила първата плюс още 360000 лв. за разработване на проекта. Колко пари е получила всяка от компаниите?

3. Автомобилен завод планира през първото тримесечие от годината да произведе 20% от годишното количество автомобили, а във второто – да увеличи производството с 50%, в четвъртото – да произведе 17000 автомобила, а в третото (когато всички работници и служители на компанията трябва да ползват годишния си отпуск) – половината от средно аритметичното на произведеното през второто и четвърто тримесечие. Какво количество планира да произведе компанията в течение на годината?

4. Лек и товарен автомобил заедно изминават разстоянието от 500 км., като лекият автомобил изразходвал с 60 л. дизелово гориво по-малко от товарния. Известно е, че с 1 л. дизелово гориво лекият автомобил изминава със 7,5 км. повече от товарния. Колко литра дизел е изразходвала всяка от машините?

5. В една фурна имало две линии – едната за производството на бели земели, а другата – на пълнозърнести. Тези две линии имали еднаква производителност. В резултат на неизправност на линията за производство на бели земели, тяхното производство намаляло с 200 броя за една смяна от осем часа, като един бял земел се изпичал с 12 с. по-дълго време от един пълнозърнест. Колко пълнозърнести земела се произвеждат за една смяна?

6. Едно селскостопанско предприятие решило да даде под аренда 30 ха от земята си. Единият парцел, който бил 100 на 1000 метра бил разделен на по-малки равнолицеви по между си участъци и втория – също. Участъците, на които бил разделен втория участък се оказали по-малки с 1 ха, а техният брой бил с 15 повече. Какъв е броя на участъците и каква е площта на всеки от тях?

7. Трима изобретатели получили общо 14100 лв. премия за изобретението си. Те ги разделили така, че вторият изобретател получил една трета от парите на първия плюс още 600 лв., а третия – една трета от парите на втория плюс още 300 лв. По колко пари е получил всеки от тях?

8. Работните заплати на един работник за октомври и ноември са в съотношение 9:8, а за ноември и декември – 6:8, като през декември заплатата му била с 225 лв. по-голяма от октомврийската. За добра работа през това тримесечие му начислили премия, в размер на 20% от работната заплата (през тримесечието). Да се намери размера на премията.

9. Себестойността на едно изделие през 2015 год. била 0,50 лв., през 2016 година се повишила с определен процент, а през 2017 се понижила със същия процент (спрямо себестойността от 2016 год.). Да се определи този процент, ако себестойността през 2017 год. е 0,48 лв.

10. Когато попитали знаменития древногръцки математик и философ Питагор колко са учениците, посещаващи неговите беседи, той отговорил, че половината

от учениците му изучават математика, една четвърт – музика, една седма – философия, а освен това има още три жени. Колко са всички ученици на Питагор?

11. Един фермер закарал на пазара 2 т. тикви, като имал намерение да ги продаде за определен брой часове през деня. Той обаче бил приятно изненадан да установи, че продава (средно) с 50 кг. на час повече, отколкото възнамерявал, в следствие на което приключил с продажбите с 2 часа по рано. По колко кг. тикви на час продавал фермерът?

III. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА СИСТЕМИ АЛГЕБРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Автомобилен завод през 2015 год. е произвел автомобили от две марки (A и B) общо 52000 броя. През 2016 год. производството на автомобили с марката A се увеличило със 75%, а от марката B – със 140%, в следствие от което общият брой произведени автомобили се удвоил. Какво е производството на автомобили по марки и по години?

Решение:

Означаваме с x автомобилите с марка A, произведени през 2015 год., а с y – от марка B, произведени през същата година. Тогава през 2016 год. ще бъдат произведени $1{,}75x$ автомобила с марка A и $2{,}4y$ – с марка B. така получаваме системата

$$x + y = 52000$$

$$1{,}75x + 2{,}4y = 104000.$$

От първото уравнение ще имаме $y = 52000 - x$, което заместено във второто води до уравнението

$$1{,}75x + 2{,}4(52000 - x) = 104000 \text{ или } 1{,}75x + 124800 - 2{,}4x = 104000.$$

Окончателно получаваме уравнението $0{,}65x = 20800$, откъдето $x = 32000$. Тогава през 2015 год. са били произведени 32000 автомобили с марката A и 20000 автомобили с марката B. През 2016 год. от марката A се произвеждат $1{,}75 \cdot 32000 = 56000$ автомобила, а от марката B - $2{,}4 \cdot 20000 = 48000$.

Задача 2. Работничка в сладкарски цех имала задание всеки ден да прави определено количество торти. Тя пресметнала, че ако може да прави по една торта на час повече, то работата ѝ ще се съкрати с половин час, а ако прави с пет торти на час повече, то ще работи с два часа по-малко. Какво е дневното ѝ задание?

Решение:

Ако с x означим обичайната производителност на работничката (торти на час), а с y – обичайния брой часове, за които изпълнява заданието си, то ще имаме

$$xy = (x+1)(y-0{,}5) = (x+5)(y-2).$$

Така получаваме системата

$$\begin{vmatrix} (x+1)(y-0{,}5) = xy \\ (x+5)(y-2) = xy, \end{vmatrix}$$

която след преработване добива вида

$$\begin{vmatrix} -0{,}5x + y = 0{,}5 \\ -2x + 5y = 10. \end{vmatrix}$$

От първото уравнение имаме $y = 0{,}5 + 0{,}5x$, което заместваме във второто уравнение и получаваме $-2x + 5(0{,}5 + 0{,}5x) = 10 \Longrightarrow -2x + 2{,}5 + 2{,}5x = 10 \Longrightarrow 0{,}5x = 7{,}5$ и $x = 15$. За y получаваме $y = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 15 = 8$. Тогава дневното задание на работничката е $xy = 15 \cdot 8 = 120$ торти.

Задача 3. Любител овощар продавал излишъка от своята продукция от орехи на пазара. Така се получило, че в течение на много дни той продавал едни и същи количества орехи преди и след обяд, но на различни цени. Обаче, през последните два дни, тази традиция се нарушила. Първият ден той продал до обяд с 2 кг. по-малко от обичайното и оборотът му бил 112 лв. Същият ден след обяд, той продал с 3 кг. по-малко от обичайното и изкарал 135 лв. На другия ден до обяд той продал с 3 кг. по-малко от обичайното, а след обяд – с 2 кг. по-малко, като до обяд изкарал с 32 лв. по-малко, отколкото след обяд. Какви са обичайните обороти преди и след обяд? Колко килограма орехи реализира той обичайно?

Решение:

Означаваме с x цената на орехите преди обяд, а y – след обяд, а с z – обичайното продадено количество орехи преди и след обяд. Тогава получаваме системата от три уравнения за трите неизвестни:

$$\begin{vmatrix} x(z-2) = 112 \\ y(z-3) = 135 \\ y(z-2) - x(z-3) = 32, \end{vmatrix}$$

където $x > 0$, $y > 0$ и $z > 3$.

Изразяваме от първото уравнение

$$x = \frac{112}{z-2},$$

а от второто –

$$y = \frac{135}{z-3}$$

и като заместим в третото получаваме

$$\frac{135(z-2)}{z-3} - \frac{112(z-3)}{z-2} = 32$$

или

$$135(z-2)^2 - 112(z-3)^2 = 32(z-2)(z-3).$$

За да намалим пресмятанията, полагаме $z-2=t$, $z-3=t-1$, $t>1$ и получаваме уравнението

$$135t^2 - 112(t-1)^2 = 32t(t-1) \text{ или}$$

$$135t^2 - 112t^2 + 224t - 112 = 32t^2 - 32t, \text{следователно}$$

$$9t^2 - 256t + 112 = 0.$$

Решаваме горното квадратно уравнение:

$$t_{1,2} = \frac{128 \pm \sqrt{128^2 - 9 \cdot 112}}{9} = \frac{128 \pm \sqrt{16384 - 1008}}{9} = \frac{128 \pm \sqrt{15376}}{9} = \frac{128 \pm 124}{9}.$$

Ще имаме $t_1 = (128-124)/9 = 4/9$ – това не е решение, защото $t_1 = 4/9 < 1$; $t_2 = (128+124)/9 = 252/9 = 28$. Така получихме, че $t = t_2 = 28$, следователно $z = t + 2 = 28 + 2 = 30$. Тогава, за неизвестните x и y ще имаме

$$x = \frac{112}{30-2} = \frac{112}{28} = 4 \quad \text{и} \quad y = \frac{135}{30-3} = \frac{135}{27} = 5.$$

Следователно, преди и след обяд, той е продавал обичайно по 30 кг., като оборотът му до обяд обичайно е възлизал на 120 лв., а след обяд – на 150 лв.

НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. Двама братя решили да се занимават със земеделие и взели заедно един участък обработваема земя под аренда. Според разчетите им, те могат заедно да обработят участъка за 12 дни. Обаче, на първия брат възникнала друга, по-важна за двамата работа, затова той се ограничил в обработването на една четвърт от участъка, като свършил своята част за по-малко от една седмица, като през това време работил само той. след това, вторият брат самостоятелно обработил останалите три четвърти от участъка. Цялата работа била свършена за 27,5 дена. Колко дни е работил всеки от тях?

2. В една строителна компания имало две строителни бригади, всяка от които – с определен брой работници. Веднъж, от първата бригада изпратили във втората бригада 40 работници, като работниците във втората бригада станали шест пъти повече от работниците в другата бригада. Друг път, от втората бригада изпратили в първата 10 и така работниците в двете бригади се изравнили. По колко работници има във всяка от бригадите?

3. Железопътен състав с определен брой еднакви платформи е в състояние да превози 175 машини. След преоборудване на платформите, капацитетът на всяка от тях се увеличил с две машини, което дало възможност да се намали броя на платформите с десет (за да се превози същия брой машини). Колко платформи се използват след преоборудването и по колко машини превозва всяка?

4. Два цеха на едно предприятие произвеждат общо 800 детайла от един вид дневно. Два аналогични цеха от друго предприятие произвеждат със 140 детайла дневно повече. По колко детайла се произвеждат в цеховете на двете предприятия, при положение, че производителностите във второто предприятие са с 10% и 30% по-високи от производителностите на съответните цехове в първото предприятие?

5. Руло тапети от един вид струва 40 лв. и дължината му е с 4 м. по-малко от дължината на руло тапети от друг вид, което струва 36 лв. и цената на един линеен метър от него е с 2 лв. по-малко. Каква е дължината и цената за линеен метър на всяко от рулата?

6. Един завод през първото тримесечие изпълнил 25% от годишния си план. През второто, третото и четвъртото тримесечие, той пуснал продукция, пропорционална на числата 11,25; 12 и 13,5 съответно. Да се определи преизпълнението на годишния план, ако през второто тримесечие е произведена продукция с 1,08 пъти повече в сравнение с първото тримесечие.

7. В магазин за кафе докарали кафе от сортовете „Арабика“ и „Робуста“ – общо 63 чувала с тегло 4,8 т. Чувалите с „Робуста“ били с 25% повече от тези с „Арабика“, като теглото на един чувал с „Арабика“ бил три четвърти от теглото на един чувал с „Робуста“. Колко чувала и какво количество от двата сорта кафе са докарали в магазина?

8. В един склад имало 300 кг. кашкавал, който бил продаден на два магазина по цена от 12,5 лв. за кг. Разстоянието до първия магазин е 20 км., а до втория – 30 км. Превоз на 10 кг. товар за един километър струва 0,5 лв. Накрая се оказало, че първият магазин заплатил за стоката и транспорта с 900 лв. повече от втория. Какви количества кашкавал са закупили магазините?

9. За един килограм от една стока и десет килограма от друга е заплатено 200 лв. Ако при сезонно изменение на цените първата стока е изменила цената си с $a\%$, а втората – с $b\%$, то за същите количества от стоките е заплатено 182 лв. да се определят първоначалните цени на стоките в общия случай и при положение, че първата е поскъпнала с 15%, а втората – поевтиняла с 25%.

10. Една поръчка може да се изпълни в ателие № 1 за 3,6 часа повече, отколкото в ателие № 2 и за 10 часа повече, отколкото в ателие № 3. Ако при същите условия първите две ателиета се обединят, то поръчката може да се изпълни за същото време, както в ателие № 3. За колко време може да се изпълни поръчката във всяко от ателиетата? А ако трите ателиета се обединят?

IV. ЗАДАЧИ ЗА НАМИРАНЕ НА ЕКСТРЕМУМ БЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПРОИЗВОДНА

За решаването на много задачи за намиране на най-малка или най-голяма стойност с икономическо и с геометрично съдържание не е необходимо използването на производни. Това дава възможност такива задачи да се решават в училище преди изучаването на диференциалното смятане. Ще разгледаме примери на математически задачи с икономическо съдържание, които могат да се решат с използването на следните две теореми.

Теорема 1. Нека $x > 0$ и $y > 0$, като произведението на тези величини е фиксирано, т.е. $xy = m = const$. Тогава сумата на величините $S = x + y$ достига своята най-малка стойност, точно тогава, когато величините са равни, т.е. $x = y = \sqrt{m}$ и $S_{\text{н.м.с.}} = 2\sqrt{m}$.

Доказателството на това твърдение е лесно. Трябва да докажем, че за произволна двойка x, y, за която е изпълнено $xy = m$ е в сила

$$S = x + y \geq 2\sqrt{m} = S_{\text{н.м.с.}}.$$

И наистина последното неравенство е еквивалентно на

$$x + y - 2\sqrt{m} \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Последното неравенство е изпълнено винаги, а равенство се получава само когато $x = y = \sqrt{m}$.

От горната теорема следва твърдението: от всички правоъгълници с едно и също лице, квадратът има най-малък периметър.

Теорема 2. Нека $x > 0$ и $y > 0$, като сумата на тези величини е фиксирано, т.е. $x + y = n = const$. Тогава произведението на величините $\Pi = xy$ достига своята най-голяма стойност, точно тогава, когато величините са равни, т.е. $x = y = n/2$ и $\Pi_{\text{н.г.с.}} = n^2/4$.

Доказателство. Трябва да докажем неравенството

$$\Pi = xy \leq \frac{n^2}{4} = \Pi_{\text{н.г.с.}} \Leftrightarrow n^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 4xy \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$$

Последното неравенство е изпълнено винаги, като равенство се постига при

$$x = y = \frac{n}{2}.$$

От горната теорема следва твърдението: от всички правоъгълници с един и същ, периметър, квадратът има най-голямо лице.

Всеки, който е запознат с нелинейното оптимиране, може да забележи, че горните две теореми са взаимно дуални.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯ

Задача 1. Базов модел за управление на запаси. Предполага се, че в един склад се съхранява запас от един вид, който е безкрайно делим. Работата на склада се състои в поръчване на запаса (от производител), съхраняването му и продажбата на запаса на клиентите на склада. Приема се, че стойността на една доставка на запаса (независимо от количеството) е a лв., а съхранението на единица количество за една година струва b лв. Известно е също така и годишното търсене на запаса от страна на клиентите – D количествени единици, като това търсене е равномерно (едно и също за всеки работен ден на склада). Да се намери количеството, което трябва да бъде поръчано от склада за доставка, при което общите годишни разходи (за доставка и съхранение) са минимални и да се намерят тези минимални разходи. Да се разработи и реши математически модел за произволни стойности на a, b и D и за $a = 150$, $b = 45$ и $D = 1500$.

Решение:

Приемаме, че търсеното количество е x. Тогава, понеже трябва да бъде удовлетворено търсене D, то общият брой на доставките за една година ще бъде D/x. Тогава, разходът за тези доставки ще бъде на стойност $a \cdot D/x$. В такъв случай, максималната складова наличност ще бъде x, след това количеството на доставката се изчерпва равномерно до 0 и тогава пристига новата доставка също в оптималния размер на x количествени единици. Следователно, средното количество от стоката, което трябва да се съхранява е $x/2$ и разходът за съхранение ще възлиза на $b \cdot x/2$ лв. Така получихме, че общите разходи $S(x)$ ще възлизат на

$$S(x) = a\frac{D}{x} + b\frac{x}{2}.$$

Да, обаче произведението на двете величини, чиято сума ще трябва да минимизираме е постоянно:

$$a\frac{D}{x} \cdot b\frac{x}{2} = \frac{abD}{2} = const.$$

Тогава (според теорема 1) най-малката стойност на $S(x)$ ще се получава, когато двете събираеми са равни:

$$a\frac{D}{x} = b\frac{x}{2} \Leftrightarrow bx^2 = 2aD \quad \text{или} \quad x = \sqrt{\frac{2aD}{b}}.$$

Горната формула за определяне на оптималното количество за доставка се нарича формула на Уилсън от теорията на запасите. Можем да пресметнем и минималните общи разходи:

$$S_{\text{н.м.с.}} = 2\sqrt{\frac{abD}{2}} = \sqrt{2abD}.$$

При $a = 150$, $b = 45$ и $D = 1500$ получаваме

$$x = \sqrt{\frac{2aD}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 1500}{45}} = 100.$$

$$S_{\text{н.м.с.}} = \sqrt{2abD} = \sqrt{2 \cdot 150 \cdot 45 \cdot 1500} = 4500 \text{ лв.}$$

Задача 2. Трябва да се огради детска площадка с площ S кв. м. Площадката трябва да има формата на правоъгълник, ориентиран по посоките на компаса. От север и юг трябва да се огради с дървена ограда на стойност 15 лв. за линеен метър, а на изток и запад – с телена ограда на стойност 6 лв. за линеен метър. Да се определят оптималните размери на площадката. Каква е максималната площ на площадката, така че стойността на оградата да се вмести в бюджет от 1200 лв.?

Решение:

Ако с x означим дължините на северната и южната граница на площадката, а с y – на източната и западна граница, то стойността на оградата на площадката ще бъде

$$C = 30x + 12y.$$

Така, че трябва да се минимизира сума от две величини, чието произведение е постоянно:

$$30x \cdot 12y = 360xy = 360S = const.$$

Според теорема 1 стойността на оградата C ще бъде най-малка, когато събираемите се изравнят, т.е.

$$30x = 12y \Rightarrow x = \frac{2}{5}y.$$

Тогава, за размерите на площадката ще имаме

$$S = xy = \frac{2}{5}y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5S}{2}} \quad \text{и} \quad x = \sqrt{\frac{2S}{5}},$$

а за стойността на оградата –

$$C = 30\sqrt{\frac{2S}{5}} + 12\sqrt{\frac{5S}{2}} = 6\sqrt{10S} + 6\sqrt{10S} = 12\sqrt{10S}.$$

Ако бюджетът, заделен за оградата е 1200 лв., то ще имаме

$$C = 12\sqrt{10S} = 1200 \Rightarrow S = 1000.$$

Като заместим полученото S във формулите за x и y, получаваме оптималните размери на площадката - $x = 20$ и $y = 50$.

Задача 3. Трябва да се огради правоъгълен участък, който се разделя на пет равни части с граници, успоредни на една от страните на правоъгълника. Външната ограда струва 100 лв. за линеен метър, а вътрешната (между частите на участъка) – 25 лв. за линеен метър. За цялата ограда е заделен бюджет от C лв. да се намерят размерите на участъка с възможно най-голяма площ. Да се построи модел при произволно C и при $C = 24000$.

Решение:

Нека с x да означим дължината на тази страна, успоредно на която са вътрешните огради между частите на участъка, а с y – дължината на другата страна. Тогава периметъра на правоъгълника ще бъде $2x + 2y$ линейни метра, а стойността на външната ограда - $50(2x + 2y) = 200x + 200y$ лв. Петте части на участъка ще се разделят от четири вътрешни огради с обща дължина $4x$ линейни метра и стойността на тези вътрешни огради ще възлиза на $25 \cdot 4x = 100x$ лв. следователно общата стойност на оградата ще е $(200x + 200y) + 100x = 300x + 200y$ лв. тогава ще имаме

$$300x + 200y = C = const.$$

Ясно е, че площта на участъка xy ще има най-голяма стойност, точно когато $300x \cdot 200y = 60000xy$ има най-голяма стойност. Тогава можем да приложим теорема 2, съгласно която най-голямата стойност ще се получава при

$$300x = 200y \Longrightarrow x = \frac{2}{3}y.$$

Тогава ще имаме

$$y = \frac{C}{400} \quad \text{и} \quad x = \frac{C}{600}.$$

За най-голямата площ получаваме

$$S_{\text{н.г.с.}} = \frac{C}{400} \cdot \frac{C}{600} = \frac{C^2}{240000}.$$

При $C = 24000$ ще имаме $x = 40$, $y = 60$ и $S_{\text{н.г.с.}} = 2400$ кв. м.

НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. Трябва да се огради правоъгълен участък земя с площ 400 кв. м. Определете оптималните размери на участъка, така че разходите за оградата да бъдат минимални (предполага се, че стойността на оградата е пропорционална на дължината ѝ).

2. За отглеждане на ценна култура е необходимо да се огради правоъгълен участък с площ S хектара. Какви размери трябва да има участъка, така че разходите по построяване на оградата да са минимални. Да се построи модел при произволно S и при $S = 5{,}76$.

3. Правоъгълна площадка с площ S кв. м. трябва да се огради и да се раздели на три равни части, успоредно на една от страните на правоъгълника. Какви трябва да бъдат размерите на площадката, така че разходите за оградата да са минимални? Да се построи модел при произволно S и при $S = 512$.

4. За ограждането на земен участък с правоъгълна форма и площ 242 кв. м. са отделени 2000 лв. От трите страни участъкът трябва да е ограден с телена ограда на стойност от 25 лв. за линеен метър, а от четвъртата страна – с дървена ограда на стойност 75 лв. за линеен метър. Ще стигнат ли заделените средства? Каква е минималната сума за ограждането на участъка?

5. Правоъгълно игрище $ABCD$ трябва да се огради по следния начин: срещуположните страни AB и CD, както и част от страната BC без два линейни метра, които се оставят за врата се ограждат със стабилна ограда на стойност 20 лв. за линеен метър, а страната DA се огражда с паянтова ограда за 10 лв. за линеен метър. Вратата струва 220 лв. (с монтаж). Бюджетът за ограждането е C лв. Да се намерят размерите на участъка с възможно най-голяма площ. Да се построи модел при произволно C и при $C = 4500$.

6. Един склад продава захар на едро, като между дневния обем на продажбите y и цената на захарта x е налице зависимостта $y = 10 - 4x$, където x се измерва в лв. за кг. захар, а y – в тонове. На каква цена трябва да се продава захарта, за да се достигне максимален оборот и какъв е този оборот?

7. Една фризьорка е убедена, че зависимостта между броя на дневните подстригвания y и цената за едно подстригване x е линейна и намаляваща, т.е. $y = a - bx$, $a > 0$ и $b > 0$. Една седмица подстригвала на цена 8 лв. по 50 души дневно, а другата – за 5 лв. по 80 души. Каква е зависимостта между y и x, на каква цена трябва да подстригва за да има максимален оборот и какъв е този оборот?

8. Да се намери най-малката стойност на израза

$$y = x^2 + x + \frac{9}{x^2 + x}.$$

9. Да се намери най-голямата стойност на израза

$$y = (14x^2 - 10x + 2)(25 + 5x - 7x^2).$$

10. Предполага се, че функцията на търсене на операционната система *Microsoft Office* е линейна намаляваща функция, т.е. има вида $y = a - bx$, $a > 0$ и $b > 0$, където x е цената в \$ за един пакет (инсталация), а y – количеството на търсене в милиарди. Анализ е показал, че при $x = p$\$ търсенето се прекратява, а $y = q$ е пазарния потенциал (ако стоката е безплатна). Всички, които не инсталират на компютрите си платената програма *Microsoft Office* ползват безплатната *Linux*.

Предполага се, че *Microsoft* се стреми към максимална печалба, а разходите за разработване на програмата им са d и не зависят от броя на инсталиранията. Приходите им са само от продажба на софтуера. Да се определи цената за един пакет *Microsoft Office,* броя на платените инсталирания на *Microsoft Office,* броя на безплатните инсталирания на *Linux* и печалбата на *Microsoft.* Да се разработи и реши модел при произволни p, q и d и при $p = 30$, $q = 2$ и $d = 3$ млрд. $.

11. Текстът върху една страница трябва да бъде 384 кв. см. Горното и долно поле трябва да са по k см., а лявото и дясното – по 2 см. Ако се вземе под внимание само икономията на хартия, какви са оптималните размери на страницата? Да се състави и реши модел при произволно k и при $k = 3$.

V. ЗАДАЧИ ЗА НАМИРАНЕ НА ЕКСТРЕМУМ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПРОИЗВОДНА

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Какви трябва да бъдат размерите на метална консервна кутия с цилиндрична форма и даден обем V, така че разходите за нейната изработка да са минимални (предполага се, че цялата кутия се изработва от един метал с еднаква дебелина и разходите са пропорционални на количеството вложен метал)

Решение:

При направата на металната кутия с даден обем V оптимални ще бъдат тези размери, при които се влага минимално количество материал, т.е. лицето на пълната повърхнина е минимално.

Лицето на пълната повърхнина се определя по формулата

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Тъй като формулата за обема на прав кръгов цилиндър е

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Ако заместим h във формулата за S получаваме функция на една променлива:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Тази функция $S(r)$ е дефинирана и непрекъсната при $r \in (0, \infty)$, като

$$\lim_{r\to 0} S(r) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty.$$

Първата производна на функцията е

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Производната $S'(r)$ съществува във всички точки от интервала $r \in (0, \infty)$ и се нулира единствено в точката

$$r = r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Така, че $S(r)$ може да променя характера си на монотонност само в тази точка, пред вид на границите в края на интервала, то става дума за минимум, съвпадащ с най-малката стойност.

Сега можем да пресметнем оптималната височина на кутията h_0:

$$h_0 = \frac{V}{\pi {r_0}^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{(2\pi)^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3 \cdot 4\pi^2}{\pi^3 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_0$$

Следователно, независимо от обема (вместимостта) на кутията, тя трябва да бъде изработена в такива пропорции, че височината ѝ да съвпада с диаметъра на основата.

Сега можем да пресметнем и най-малката пълна повърхнина, защото разходите за изработване на кутията ще бъдат пропорционални на нея. Ще имаме

$$S_{\text{н.м.с.}} = S(r_0) = 2\pi {r_0}^2 + \frac{2V}{r_0} = 2\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{2\pi V^2} + \sqrt[3]{16\pi V^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Задача 2. Разходите за гориво на един параход се делят на две съставящи (събираеми). Първата от тях не зависи от скоростта и е 480 $ за час, а втората е пропорционална на куба на скоростта, като при скорост от 10 км./ч. е 30 $/ч. При каква скорост общите разходи на един км. път ще бъдат най-малки и на колко ще възлизат те?

Решение:

Ясно е, разходите (на час) са $C = C_1 + C_2$, като $C_1 = 480 = const$, а $C_2 = av^3$, като константата a можем да определим от данните: при v $C_2 = 30$. Като заместим получаваме

$$30 = a10^3 \Longrightarrow a = \frac{3}{100} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{3}{100}v^3.$$

Тогава разходите на час път ще бъдат

$$C(v) = C_1 + C_2(v) = 480 + \frac{3}{100}v^3.$$

Но за един час ще се изминат v км. (пътят е скоростта по времето). Тогава разходите $D(v)$ за един км. Изминат път ще възлизат на

$$D(v) = \frac{C(v)}{v} = \frac{480}{v} + \frac{3}{100}v^2.$$

Функцията на една променлива $D(v)$ е дефинирана в интервала $v \in (0, \infty)$ и освен това

$$\lim_{v \to 0} D(v) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{v \to \infty} D(v) = \infty.$$

Първата производна на функцията е

$$D'(v) = -\frac{480}{v^2} + \frac{6}{100}v.$$

Производната $D'(v)$ съществува във всички точки от интервала $v \in (0, \infty)$ и се нулира единствено в точката

$$v = v_0 = 20$$

Така, че $D(v)$ може да променя характера си на монотонност само в тази точка, пред вид на границите в края на интервала, то става дума за минимум, съвпадащ с най-малката стойност. Тази най малка стойност е

$$D_{\text{н.м.с.}} = D(20) = \frac{480}{20} + \frac{3}{100}20^2 = 24 + 12 = 36.$$

Задача 3. От пункт A, разположен в полето, автоколона трябва да превози зърно до пункт B, разположен на праволинейно шосе, чиято най-близка до A точка е C. Скоростта на машините, ако минават през полето е 30 км./ч., а ако се движат по пътя – 60 км./ч. Колко време ще икономиса автоколона от 50 машини, ако се движи по най-икономичния от към време път в сравнение с вариантите: а) $A \rightarrow$

$C \to B$; б) $A \to B$. Дадено е, че $AC = 9$ км. и $CB = 12$ км. В разчетите да се приеме, че $\sqrt{3} \cong 1\frac{11}{15}$.

Решение:

Ако една машина се движи по маршрута $A \to C \to B$, тя ще изразходва 9/30=0,3 ч. от A до C и 12/60=0,2 ч. от C до B или общо 0,5 ч. За 50 машини това прави 25 ч.

ΔACB е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха C, така че

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

Тогава, ако една машина се движи по маршрута $A \to B$ тя изразходва 15/30=0,5 ч., а за 50 машини – също 25 ч. Така, че минималното време трябва да се сравнява с 25 ч.

Нека точка D да е разположена по шосето между точките C и B, на разстояние x км. от C и, следователно – на $12 - x$ км. от крайния пункт B. Предполагаме, че една машина се движи по маршрут $A \to D \to B$. Частта от този маршрут AD е разположена изцяло в полето; нейната дължина (пред вид на това, че ΔACD е правоъгълен) ще бъде

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{81 + x^2}$$

Тогава общото време, което ще изразходва една машина, движеща се по маршрута $A \to D \to B$ ще бъде

$$t(x) = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{30} + \frac{12 - x}{60}.$$

Тази функция $t(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $x \in [0,12]$, следователно, тя достига точната си горна и долна граница в този интервал (теорема на Вайерщрас). Нейната производна е

$$t'(x) = \frac{x}{30\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{60}.$$

Тази производна се нулира, ако е изпълнено

$$\frac{x}{30\sqrt{81 + x^2}} = \frac{1}{60} \Leftrightarrow 2x = \sqrt{81 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 = 81 + x^2 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}.$$

Тъй като стойността на $t(x)$ при $x = 3\sqrt{3}$ е

$$t(3\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{81+27}}{30} + \frac{12-3\sqrt{3}}{60} = 0{,}15\sqrt{3} + 0{,}2 \cong \frac{3}{20}\frac{26}{15} + \frac{1}{5} = \frac{23}{50} = 0{,}46$$

и $t(3\sqrt{3}) \cong 0{,}46 < t(0) = t(12) = 0{,}5$, то действително става дума за най-малката стойност на тази функция в интервала $x \in [0{,}12]$.

Тъй като една машина икономисва 0,04 ч., то 50 машини ще икономисват общо 2 ч.

НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. От правоъгълен лист с размери 30 на 50 трябва да се направи отворена отгоре правоъгълна кутия, като се изрежат при върховете еднакви квадратчета и се прегънат получилите се ленти под прав ъгъл. Каква трябва да бъде страната на изрязаните квадрати, за да може кутията да има най-голяма вместимост?

2. Какви трябва да бъдат размерите на отворена отгоре метална кутия с цилиндрична форма и даден обем V, така че разходите за нейната изработка да са минимални, ако се има пред вид, че дебелината на дъното е k пъти по-голяма от дебелината на околната повърхнина (разходите са пропорционални на количеството вложен метал)?

3. Да се определят размерите на басейн с обем V и дълбочина H, така че за облицоване да се изразходва възможно най-малко количество материал.

4. Трябва да се направи отворен цилиндричен варел с даден обем V. Стойността на кв. м материал за изработване на дъното на варела е P_1 лв., а за изработване на стената - P_2 лв. Какви трябва да бъдат радиуса на дъното и височината на варела, така че разходите за изработването му да са минимални?

5. При проектирането на цех за преработка на плодове и зеленчуци се планира да се построят хладилни камери с формата на правилни четириъгълни призми и обеми от 144 куб. м. За облицоване на околните стени се използва материал на стойност 15 лв. на кв. м., а за облицоване на дъното – 20 лв. на кв. м. При какви размери на хладилните камери тяхната облицовка ще е най-евтина?

6. Един завод трябва да произведе резервоари с формата на правилни четириъгълни призми и обеми от 4 куб. м. (отворени отгоре), като вътрешността трябва да се покрие с олово. Какви трябва да бъдат размерите на резервоарите, така че да се изразходва най-малко количество олово? (Дебелината на стените се пренебрегва)

7. Прозорец има формата на правоъгълник, увенчан с полукръг. Периметърът му е a. При какви размери на правоъгълника, прозорецът ще пропуска най-много светлина?

8. Една сонда е разположена в полето, на 9 км. от най-близката точка от праволинейно шосе. От сондата трябва да се изпрати куриер до най-близкото населено място, разположено по шосето и намиращо се на 15 км. от тази точка. Скоростта на куриера при движението му с велосипед в полето е 8 км./ч., а по шосето – 10 км./ч. По какъв маршрут трябва да премине куриера, така че да стигне до населеното място възможно най-бързо?

9. Пунктовете A и B са разположени на разстояние 500 км. един от друг и са свързани с железница. Заводът N е на 13 км. от B по посока, перпендикулярна на железницата. За доставка на продукцията от завода N до пункт A ще се строи шосе NP до пункта P разположен на железницата. Стойността на транспорта на единица товар по шосе е два пъти по-голяма отколкото по железницата. Къде трябва да се избере пункта P, така че транспортните разходи от N до A да са най-малки? В разчетите да се приеме, че $\sqrt{3} \cong 1\frac{11}{15}$.

10. Трябва да се изработи платнена шатра с формата на прав кръгов конус и обем 14,14 куб. м. Какви трябва да са размерите на шатрата, така че за изработването ѝ да се изразходва най-малко количество плат?