§. ИНТЕГРИРАНЕ ЧРЕЗ ПОЛАГАНЕ (СУБСТИТУЦИЯ)

.1. Интегриране чрез полагане – основна идея

Един от най-мощните методи за аналитично намиране на интеграли е мотодът на полагането. Съществуват голям брой субституции, полезни при изчисляването на интеграли. По-долу ще покажем някои от най-важните от тях.

Основната цел на полагането е да получим еквивалентен интеграл, който се пресмята по-лесно от дадения.

Идеята е да сменим независимата променлива x в интеграла $\int f(x)dx$ с нова променлива t с помощта на проста свързваща формула от вида $x=\varphi(t)$. Оттук следва, че:

$$(x)'_x = \left[\varphi(t)\right]'_t \Rightarrow 1.dx = \varphi'(t)dt \text{ и } f\left[\varphi(t)\right].$$

Следователно, $\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)dt$, което може да е по-лесно за пресмятане.

Понякога е по-добре да се използва полагането $t=\psi(x)$.

<u>Алгоритъм за пресмятане на интеграл</u> $\int f(x)dx$ <u>чрез полагане.</u>

<u>Стъпка 1.</u> Определяне на най-подходящата формула за полагане за дадената задача.

<u>Стъпка 2.</u> Полагане на t за x в подинтегралнта функция, изчисляване на dx от формулата на полагането и записване на формулата на новия интеграл $\int f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)dt$.

<u>Стъпка 3.</u> Изчисляване на новия интеграл.

<u>Стъпка 4.</u> Преобразуване на отговора $F(t)$ към променливата x.

<u>Команди на Maple</u>

```
>I:=int(f,x);
>Int(f,x);
```

изчисляват интеграл от фунцията **`f`** с променлива **`x`**.

```
>with(student):changevar(x=t^2,I);
```

полагане на променливата **`t`** като независима чрез избраната формула на полагане (в този пример $x = t^2$) в интеграла **`I`**.

```
>I1:=value(%);
```

изчисляване на крайния резултат (интеграл), който е записан в нашата *Maple* програма.

Пример. Да се пресметне интеграла

$$I_0 = \int \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

Математическо решение.

Полагаме $\sqrt{x} = t > 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Тогава

$$I_0 = \int \frac{2tdt}{2\left(t^2+1\right)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\sqrt{x} + C.$$

Решение с Maple.

```
>I0:=int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := arctg\left(\sqrt{x}\right)$$

Подробно решение с Maple.

1) задаваме интеграла в програмата ***STUDENT***:

```
>with(student):
>I0:=Int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := \int \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}\,dx$$

2) полагаме $t^2 = x$:

```
>changevar(x=t^2,I0);
```

$$\int \frac{2t}{2\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2}}\,dt$$

3) изчисляваме новия интеграл:

```
>I0:=value(%);
```

$$I_0 = \frac{t.arctan(t)}{\sqrt{t^2}}$$

4) връщаме се към началната променлива x:

```
>I0:=subs(t=sqrt(x),I0);
```

$$I_0 = arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Математическо решение.

Полагаме $\left\{ x = \frac{2}{t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{t^2}dt \right\}$. Тогава

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\frac{2}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}-4}} = \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{2}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}arcsin t + C = -\frac{1}{2}arcsin\frac{2}{x} + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
 >restart: with(student):
>I1:=Int(1/(x*sqrt(x^2-4)),x):
>changevar(x=2/t,I1); I1:=value(%);
>I1:=subs(t=2/x,I1);
```

$$I1 := -\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I_2 = \int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^x}}.$$

Математическо решение.

Полагаме $\left\{ \sqrt{1-e^x} = t > 0 \right\}$ за да се освободим от тежкия израз.

Оттук $x = ln\left(1-t^2\right) \Rightarrow dx = \frac{-2t}{1-t^2}dt \Rightarrow$

$$I_2 = \int \frac{e^{3ln\left(1-t^2\right)}}{t} \cdot \frac{-2t}{1-t^2} dt = -2\int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{1-t^2} dt =$$

$$= -2\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -2\left(t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C =$$

$$= -2\left(\sqrt{1-e^x} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^5\right) + C.$$

<u>Подробно решение с Maple.</u>

```
>restart:with(student):
>I2:=Int(exp(3*x)/sqrt(1-exp(x)),x);
>changevar(sqrt(1-exp(x))=t,I2);
>I2:=value(%);
>I2:=subs(t=sqrt(1-exp(x)),I2);
```

$$I2 := -2\sqrt{1-e^x} - \frac{2}{5}\left(1-e^x\right)^{(5/2)} + \frac{4}{3}\left(1-e^x\right)^{(3/2)}.$$

<u>Пример.</u> Да се пресметне интегралът

$$I_3 = \int \frac{2\sin x.\cos x}{\cos^4 x - 1} dx.$$

<u>Математическо решение.</u>

Полагаме $\left\{\cos^2 x = t\right\}$. Тогава $dt = 2\cos x.\left(-\sin x\right)dx$.

$$I_3 = -\int \frac{dt}{t^2 - 1} = -arct\,gt + C = arctg\left(\cos^2 x\right) + C$$

<u>Подробно решение с Maple.</u>

```
>restart:with(student):
>I3:=Int(2*sin(x)*cos(x)/(cos(x)^4-1),x);
>changevar(cos(x)^2=t,I3);
>I3:=value(%);
>I3:=subs(t=cos(x)^2,I3);
```

$$I3 := arctan\,h\left(\cos(x)^2\right).$$

<u>Пример.</u> Да се пресметне интегралът

$$I_4 = \int \frac{\sin\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Математическо решение.

Полагаме $\left\{\sqrt[4]{x} = t\right\}$. Тогава $x = t^4, dx = 4t^3 dt \Rightarrow$

$$I_4 = \int \frac{\sin t.4t^3 dt}{t^3} = 4\int \sin t dt = -4\cos t + C =$$
$$= -4\cos\sqrt[4]{x} + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
>restart:with(student):
>I4:=Int(sin(x^(1/4))/(x)^(3/4),x);
>changevar(x^(1/4)=t,I4); I4:=value(%);
>I4:=subs(t=x^(1/4),I4);
```

$$I4 := -4\cos\left(x^{(1/4)}\right).$$

.2. Интегриране чрез полагане на функция от вида $f(x) = \left(ax^2 + bx + x\right)$

Ще разгледаме полаганията за пресмятане на следните типове интеграли:

$$J_1 = \int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx,$$
$$J_2 = \int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

От представянето

$$ax^2 + bx + c = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

следва, че е удобно полагането $x + \frac{b}{2a} = t$ или $x = t - \frac{b}{2a}$, при което $dx = dt$.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I_5 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx.$$

Математическо решение.

Полагаме $\{x-1=t\}$. Тогава $x^2-2x+2=t^2+1$ и

$$I_5 = \int \frac{2(t+1)-2}{t^2+1}dt = \int \frac{2t}{t^2+1}dt = \int \frac{1}{t^2+1}d\left(t^2+1\right) =$$
$$= ln\left|t^2+1\right| + C = ln\left|x^2-2x+2\right| + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
>restart:with(student):
>I5:=Int((2*x-2)/(x^2-2*x+2),x);
>changevar(x-1=t,I5); I5:=value(%);
>I5:=subs(t=x-1,I5);
```

$$I5 := ln\left((x-1)^2+1\right)$$

```
>simplify(I5);
```

$$I5 := ln\left(x^2-2x+2\right).$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I_6 = \int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Математическо решение.

Полагаме $\{x+2=t\}$. Тогава $x^2+4x+8=t^2+4$ и

$$I_6 = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
>restart:with(student):
>I6:=Int(1/(x^2+4*x+8),x);
>changevar(x+2=t,I6); I6:=value(%);
>I6:=subs(t=x+2,I6);
```

$$I6 := \frac{1}{2}arctan\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

<u>Пример.</u> Да се пресметне интегралът

$$I_7 = \int \frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx.$$

<u>Математическо решение.</u>

Полагаме $\{x+2=t\}$. Тогава $x^2+4x+5=t^2+1$ и

$$I_7 = \int \frac{3t-7}{t^2+1}dt = 3\int \frac{t}{t^2+1}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}d\left(t^2+1\right) - 7arctgt =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|t^2+1\right| - 7arctgt + C =$$

$$= \frac{3}{2}ln\left|x^2+4x+5\right| - 7arctg\left(x+2\right) + C.$$

<u>Подробно решение с Maple.</u>

```
>restart:with(student):
>I7:=Int((3*x-1)/(x^2+4*x+5),x);
>simplify(changevar(x+2=t,I7));
>I7:=value(%);
>I7:=simplify(subs(t=x+2,I7));
```

$$I7 := \frac{3}{2}ln\left(x^2+4x+5\right) - 7arctg\left(x+2\right).$$

<u>Пример.</u> Да се пресметне интегралът

$$I_8 = \int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx.$$

<u>Математическо решение.</u>

Полагаме $\left\{x-\frac{3}{4}=t\right\}$. Тогава $2x^2-3x+1=2\left(t^2-\frac{1}{16}\right)$.

$$I_8 = \frac{1}{2}\int \frac{1-8t}{t^2 - \frac{1}{16}}dt = -8\int \frac{8t-1}{16t^2-1}dt =$$

$$= 8\int \frac{1}{(4t)^2-1}dt - 8.4\int \frac{2t}{(4t)^2-1}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(4t)^2-1}d(4t) - 32\int \frac{1}{16t^2-1}dt^2 =$$

$$= ln\left|\frac{4t-1}{4t+1}\right| - 2\,ln\left|16t^2-1\right| + C =$$

$$= ln|4t-1| - ln|4t+1| - 2\,ln|4t-1| - 2\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4t-1| - 3\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4x-4| - 3\,ln|4x-2| + C =$$

$$= -ln 4 - ln|x-1| - 3\,ln 2 - 3\,ln|2x-1| + C =$$

$$= -5\,ln 2 - ln|x-1| - 3\,ln|2x-1| + C = .$$

<u>Подробно решение с Maple.</u>

```
>restart:with(student):
>I8:=Int((7-8*x)/(2*x^2-3*x+1),x);
>I8:=simplify(changevar(x-3/4=t,I8));
>I8:=value(%);
>I8:=simplify(subs(t=x-3/4,I8));
```

$$I8 := -5\,ln(2) - 3\,ln(2x-1) - ln(x-1).$$

<u>Пример.</u> Да се пресметне интегралът

$$I_9 = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx.$$

<u>Математическо решение.</u>

Полагаме $\{x-1=t\}$. Тогава $x^2-2x+2 = t^2+1$ и

$$I_9 = \int \frac{2(t+1)-2}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}d\left(t^2+1\right) =$$

$$= 2\sqrt{t^2+1} + C = 2\sqrt{x^2-2x+2} + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
>restart:with(student):
>I9:=Int((2*x-2)/sqrt(x^2-2*x+2),x);
>I9:=simplify(changevar(x-1=t,I9));
>I9:=value(%);
>I9:=simplify(subs(t=x-1,I9));
```

$$I9 := 2\sqrt{x^2-2x+2}$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I_{10} = \int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx.$$

Математическо решение.

Полагаме $\{x-1=t\}$. Тогава $9+6x-3x^2 = 3\left(4-t^2\right)$ и

$$I_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt - \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt =$$

$$= -\sqrt{3}\int\frac{1}{2\sqrt{4-t^2}}d\left(4-t^2\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{3\left(4-t^2\right)} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

Подробно решение с Maple.

```
>restart:with(student):
>I10:=Int((3*x-5)/sqrt(9+6*x-3*x^2),x);
>I10:=simplify(changevar(x-1=t,I10));
>I10:=value(%);
>I10:=simplify(subs(t=x-1,I10));
```

$$I10 := -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,arcsin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{9+6x-3x^2}.$$

.3. Задачи за самоподготовка

Решете чрез полагане следните интеграли:

$$I_{11}=\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}+9}dx\text{,}$$

Отговор. $I_{11}=\frac{1}{6}arctg\left(\frac{e^{2x}}{3}\right)+C$,

$$I_{12}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)},$$

Отговор. $I_{12}=\frac{3}{2}ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$

$$I_{13}=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\text{, substitution } x=a(1-t),$$

Отговор. $I_{13}=\pm arccos\frac{a-x}{a}+C$

$$I_{14}=\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx,$$

Отговор. $I_{14}=ln\left(e^x-1\right)^2-x+C$.

$$I_{15}=\int\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx,$$

Отговор. $I_{15}=ln\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right|+arctg\left(2x+1\right)+C$

$$I_{16}=\int\frac{2x-5}{x^2+4x+5}dx,$$

Отговор. $I_{16}=ln\left|x^2+4x+5\right|-9arctg\left(x+2\right)+C$

$$I_{17}=\int\frac{x+1}{3x^2+6x+2}dx,$$

Отговор. $I_{17}=\frac{1}{6}ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right|+C$,

$$I_{18} = \int \frac{x+2}{3x^2+6x+2}dx$$

Отговор. $I_{18} = \frac{1}{6}ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)+C$

$$I_{19} = \int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx$$

Отговор. $I_{19} = -\frac{1}{3}ln\left|x-\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right| + C$

$$I_{20} = \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx,$$

Отговор. $I_{20} = 2\sqrt{x^2+3x+5} - 7\,ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right| + C$

$$I_{21} = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx,$$

Отговор. $I_{21} = \sqrt{x^2+3x+5} + C$

$$I_{22} = \int \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx,$$

Отговор. $I_{22} = 2\sqrt{2x^2-x+1} + \frac{3}{2}ln\left|\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2x^2-x+1}\right| + C$

$$I_{23} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}},$$

Отговор. $I_{23} = ln\left|x+2+\sqrt{x^2-4x-3}\right| + C$

.4. Тест за самоконтрол

Пресметнете интегралите:

$$I_{24} = \int \frac{\cos\sqrt[5]{x}dx}{\sqrt[5]{x^4}},$$

.
$$I_{25} = \int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4 2x + 4},$$

$$I_{26} = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^4 x + 1}},$$

$$I_{27} = \int \frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x-3}}dx,$$

$$I_{28} = \int \frac{dx}{\sqrt{10x - x^2}},$$

$$I_{29} = \int \frac{3x+3}{2x^2 - x - 1}dx,$$

$$I_{30} = \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}dx.$$

.5. Въпроси за самоконтрол

1) Обяснете идеята на интегрирането чрез полагане.

2) Дайте пример за интегриране с полагане.

3) Обяснете значението на следните команди на *Maple*:

```
with(student), changevar(x=t^2,I1),
simplify(changevar(x=t^2,I1)),
I11:=value(%),I1:=subs(t=sqrt(x),I1),
I1:=simplify(subs(t=sqrt(x),I1)).
```