

§. ИНТЕГРИРАНЕ ПО ЧАСТИ

1. Интегриране по части. Примери.

Нека функциите  $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$  са непрекъснати в интервала  $[a, b]$ . Тогава

$$\int f(x) g'(x) dx = \int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

или

$$(1) \quad \int u dv = uv - \int v du,$$

където  $u = f(x)$ ,  $dv = g'(x) dx$  са частите на подинтегралната функция.

Формула (1) се прилага при интеграли от вида:

$$1) \quad \int P_n(x) e^{kx} dx, \int P_n(x) \sin kx dx, \int P_n(x) \cos kx dx,$$

където  $P_n(x)$  е полином на  $x$  от степен  $n$  и  $k$  е константа.

Пресмятането на този тип интеграли включва:

- а) променливата  $u$  да е полином, т.е.  $u = P_n(x)$ ;
- б) прилагане на формула (1)  $n$ - пъти.

$$2) \quad \int P_n(x) \ln x dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx, \\ \int P_n(x) \arctg x dx, \int P_n(x) \text{arcctg} x dx,$$

където  $P_n(x)$  е полином на  $x$  от степен  $n$ . Пресмятането включва:

- а)  $u = f(x) \neq P_n(x)$ ;
- б) прилагане на формула (1).

$$3) \quad \int e^{ax} \cos b x dx, \int e^{ax} \sin b x dx$$

където  $a, b$  са произволни константи. Пресмятането се свежда до:

## Интегриране по части

а)  $u = \cos bx$  или  $u = \sin bx$ ;

б) прилагане на формула (1) два пъти.

### Команди на Maple.

Лесно е да се види как се изчислява интеграл по части, с помощта на следната подпрограма

```
>with(student) :
```

и командата

```
>intparts(A,u) ;
```

където **A** е интегралът

```
>A:=Int(f,x) ;
```

и функцията **u** се определя по правилата 1) ÷ 3).

Също така е добре да се използва функцията **simplify** за опростяване на резултата.

Пример. Да се пресметне интегралът:

$$I_1 = \int (6x - 3) \sin 2x dx.$$

### Математическо решение.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 6x - 3 = u \Rightarrow du = 6dx \\ \int \sin 2x dx = \int dv \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| \Rightarrow \\ I_1 &= \int \underbrace{(6x - 3)}_u d \left( \underbrace{-\frac{1}{2} \cos 2x}_v \right) = \\ &= \underbrace{(6x - 3)}_u \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right)}_v - \int \underbrace{\left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right)}_v \underbrace{d(6x - 3)}_u = \\ &= (6x - 3) \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int -\frac{1}{2} \cos 2x \cdot 6 dx = \\ &= -\frac{6x - 3}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

### Решение с Maple.

```
>I[1]:=int((6*x-3)*sin(2*x),x) ;
```

$$I_1 := \frac{3}{2} \sin(2x) - 3x \cos(2x) + \frac{3}{2} \cos(2x)$$

## Интегриране по части

### Детайлно решение с Maple.

>with(student) :

>A:=Int((6\*x-3)\*sin(2\*x),x) ;

$$A := \int (6x-3)\sin(2x) dx$$

>J:=simplify(intparts(A,6\*x-3)) ;

$$J := -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + 3 \int \cos(2x) dx =$$

The evaluation of the integral  $J_1 = 3 \int \cos(2x) dx$  is as usual:

>J[1]:=int(3\*cos(2\*x),x) ;

$$J_1 := \frac{3}{2}\sin(2x)$$

Решението е:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + J_1 = \\ &= -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) + C. \end{aligned}$$

Пример. Да се пресметне интегралът:

$$I_2 = \int (x+2)\cos x dx.$$

### Математическо решение.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (x+2)d(\sin x) = (x+2)\sin x - \int \sin x dx = \\ &= (x+2)\sin x - \int \sin x dx = (x+2)\sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

### Детайлно решение с Maple.

>with(student) :

>A:=Int((x+2)\*cos(x),x) ;

$$A := \int (x+2)\cos(x) dx$$

>J:=simplify(intparts(A,x+2)) ;

$$J := (x+2)\sin(x) - \int \sin(x) dx$$

>J[1]:=int(sin(x),x) ;

$$J_1 := -\cos(x)$$

Решението е:

$$I_2 = (x+2)\sin x - J_1 = (x+2)\sin x + \cos x + C.$$

## Интегриране по части

### Решение с Maple (проверка).

>A:=int((x+2)\*cos(x),x);

Пример. Да се пресметне интегралът:

$$I_3 = \int x^2 \sin x dx$$

### Математическо решение.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv} = \int \underbrace{x^2}_u d(\underbrace{-\cos x}_v) =$$

$$= -x^2 \cos x + \int \cos x d(x^2) = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$\left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = -x^2 \cos x + 2 \int \underbrace{x}_u d(\underbrace{\sin x}_v) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \left[ x \sin x - \int \sin x dx \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

### Детайлно решение с Maple.

>with(student):

>A:=Int(x^2\*sin(x),x):

>J:=simplify(intparts(A,x^2));

$$J := -x^2 \cos(x) + \int \cos(x) 2x dx$$

>B:=2\*Int(cos(x)\*x,x):

>J[1]:=simplify(intparts(B,x));

$$J_1 : 2x \sin x - 2 \int \sin x dx$$

>J[2]:=int(2\*sin(x),x):

$$J_2 := -2 \cos(x)$$

Решението е:

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

## Интегриране по части

**Пример.** Да се пресметне интегралът:

$$I_4 = \int e^{-2x} \cos x dx.$$

**Математическо решение.**

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x} dx \\ \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = \int \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \int \underbrace{e^{-2x}}_u d(\underbrace{\sin x}_v) =$$

$$= e^{-2x} \sin x - \int \sin x d(e^{-2x}) = e^{-2x} \sin x + 2 \int \underbrace{\sin x}_v \underbrace{e^{-2x}}_u dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x} dx \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x} \sin x + 2 \int \underbrace{e^{-2x}}_u d(\underbrace{-\cos x}_v) =$$

$$= e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x + 2 \int \cos x de^{-2x} =$$

$$= e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x - 4 \int e^{-2x} \sin x dx \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x - 4I_4 \Rightarrow$$

$$I_4 = \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) + C.$$

**Детайлно решение с Maple.**

>with(student) :

>A:=Int(exp(-2\*x)\*cos(x),x) :

>J:=simplify(intparts(A,exp(-2\*x))) ;

$$J := e^{(-2x)} \sin(x) + 2 \int e^{(-2x)} \sin(x) dx$$

Тогава

$$J := e^{(-2x)} \sin(x) + J_1.$$

Изчисляване на  $J_1$ :

>B:=2\*Int(exp(-2\*x)\*sin(x),x) :

>J[1]:=simplify(intparts(B,exp(-2\*x))) ;

## *Интегриране по части*

$$J_1 := -2e^{(-2x)} \cos(x) - 4 \int e^{(-2x)} \sin(x) dx$$

Следователно,

$$J := e^{(-2x)} \sin(x) - 2e^{(-2x)} \cos(x) - 4J.$$

Оттук следва, че

$$J := \frac{1}{5} e^{(-2x)} (\sin x - 2 \cos x) + C.$$

**Решение с Maple (проверка).**

`> J := int (exp (-2*x) * cos (x) , x) ;`

**Пример.** Да се пресметне интегралът:

$$I_5 = \int \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx.$$

**Забележка.** Този интеграл се нарича “100 000”, защото заради него 100 000 не са си взели математическия изпит по решаване на интеграли.

**Математическо решение.**

$$\left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \int dv = \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} d(x^2 + a^2) \\ \Rightarrow v = -\frac{1}{2(x^2 + a^2)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \underbrace{x}_{u} d \underbrace{\left( -\frac{1}{2(x^2 + a^2)} \right)}_v = \\ &= -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)} dx = \end{aligned}$$

## Интегриране по части

$$= -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

### Детайлно решение с Maple.

>with(student) :

>A:=Int(exp(-2\*x)\*cos(x),x) :

>J:=simplify(intparts(A,exp(-2\*x))) ;

???

## .2. Задачи за самоподготовка

1) Да се пресметнат интегралите:

$$I_6 = \int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx,$$

$$I_7 = \int \ln(4x^2 + 1) dx,$$

$$I_8 = \int x^2 e^x dx,$$

$$I_9 = \int e^{3x} \sin 2x dx,$$

$$I_{10} = \int \sin \ln x dx.$$

### Математическо решение на $I_6$ .

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} = u \Rightarrow \\ du = \frac{1}{1+(\sqrt{2x-1})^2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} dx = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} dx \Rightarrow \\ \int dx = \int dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$I_6 = x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \int x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{2x-1}} =$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$$

## Интегриране по части

Решение с Maple на  $I_6$ .

>I[6]:=int(arctan(sqrt(2\*x-1)),x);

$$I_6 := \frac{1}{2}(2x-1)\operatorname{arctg}(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2x-1})$$

Решение с Maple.

>I[7]:=int(ln(4\*x^2+1),x);

$$I_7 := x\ln(4x^2+1) - 2x + \arctan(2x)$$

>I[8]:=int(x^2\*exp(x),x);

$$I_8 := x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

>I[9]:=int(exp(3\*x)\*sin(2\*x),x);

$$I_9 := -\frac{2}{13}e^{(3x)}\cos(2x) + \frac{3}{13}e^{(3x)}\sin(2x)$$

>I[10]:=int(sin(ln(x)),x);

$$I_{10} := -\frac{1}{2}\cos(\ln(x))x + \frac{1}{2}\sin(\ln(x))x$$

2) Да се пресметнат интегралите:

$$I_{11} = \int x^2 \sin x dx,$$

$$I_{12} = \int x \ln x dx,$$

$$I_{13} = \int x^2 e^{5x} dx,$$

$$I_{14} = \int x^5 e^{x^2} dx,$$

$$I_{15} = \int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx,$$

$$I_{16} = \int x(\operatorname{arctg}x)^2 dx,$$

$$I_{17} = \int \frac{x \cdot \operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$I_{18} = \int \frac{x^2 \operatorname{arctg}x}{1+x^2} dx,$$

## Интегриране по части

$$I_{19} = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx,$$

$$I_{20} = \int x^4 e^{3x} \sin x dx,$$

$$I_{21} = \int \ln(x^2 + 2) dx,$$

$$I_{22} = \int x^2 \ln(1+x) dx.$$

### .3. Тест за самоконтрол

Да се пресметнат интегралите:

$$I_{23} = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx,$$

$$I_{24} = \int e^{2x} \cos x dx,$$

$$I_{25} = \int \ln^2 x dx,$$

$$I_{26} = \int \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

### .4. Въпроси за самоконтрол

- 1) Обяснете идеята на интегрирането по части.
- 2) Как можете да зададете функцията  $u$  за интегриране по части?
- 3) Обяснете значението на следните команди на *Maple*:

```
with(student) :  
A:=Int(f, x) ;  
intparts(A, u) ;  
simplify
```