§. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ (АНТИДИФЕРЕНЦИРАНЕ)

.1. Определения

Основна задача в диференциалното смятане е да се намери производната $f'(x)$ или диференциала $df(x)=f'(x)dx$ на функцията $f(x)$. Интегралното смятане решава обратната задача – да се намери функция $F(x)$, чиято производна е равна на дадената функция $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

Интегралното смятане се прилага в геометрията, механиката, физиката, техниката и т.н.

Определение. Функцията $F(x)$, $x\in(a,b)$ е антипроизводна на функцията $f(x)$ в интервала (a,b) ако е диференцируема за $\forall x\in(a,b)$ и $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.

Определение. Множеството от всички антипроизводни функции на $f(x)$ в даден интервал (a,b), $\{F(x)+C\}$, където C е константа, е неопределен интеграл на $f(x)$ за всички x в (a,b) и се означава с

$$\boldsymbol{\int f(x)dx=F(x)+C}.$$

Символът $\int$ се нарича ***знак за интеграл***, $\boldsymbol{f(x)}$- ***подинтегрална функция, x - интеграционна променлива***, символът ***dx*** означава променливата по която се намират антипроизводните и $\boldsymbol{C}$ - ***интеграционна константа.***

Правила на интегриране.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx,$$

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx,\ a\text{ - константа},$$

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

Неопределен интеграл (антидиференциране)

$$\int f(x)dx = \frac{1}{A}\int f(x)dAx,\ A\text{- константа},$$
$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x \pm A),\ A\text{- константа},$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C,$$

където $u(x)$ е диференцируема функция.

Основни правила за интегриране.

$$d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du,$$
$$\int dF(u) = F(u) + C$$
$$\int af(u)du = a\int f(u)du,$$
$$\int (f_1(u) \pm f_2(u))du = \int f_1(u)du \pm \int f_2(u)du,$$

където u е диференцируема функция.

Формули за интегриране.

(1) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$$

(2) $$\int e^x dx = e^x + C,$$

(3) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C, a \neq 1,$$

(4) $$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C,$$

(5) $$\int sin\, x dx = -cos\, x + C,$$

(6) $$\int cos\, x dx = sin\, x + C,$$

(7) $$\int \frac{d}{cos^2 x} = tgx + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

Неопределен интеграл (антидиференциране)

(8) $$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq k\pi ,$$

(9) $$\int tgxdx = -ln\left|cos\, x\right| + C, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

(10) $$\int ctgxdx = ln\left|sin\, x\right| + C, x \neq k\pi ,$$

(11) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ a \neq 0 \\ \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a \end{cases},$$

(12) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0 \\ \frac{1}{a} arccotg\frac{x}{a} + C, \quad |x| > a \end{cases},$$

(13) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

(14) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,\ |x| > |a|,$$

(15) $$\int chxdx = shx + C,$$

(16) $$\int shxdx = chx + C,$$

(17) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|,$$

(18) $$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C,$$

(19) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Команди на Maple.

```
> int(f,x);
> Int(f,x);
```

където **f** е подинтегралната функция, ***x*** - интеграционна поменлива.

Проверката на резултата от **J:=int(F,x) става с командата**:

```
> diff(J,x);
```

.2. Интегриране с помощта на формули

Съществуват много формули за интегриране. Ние ще използваме (1)÷(19), както и правилата за интегриране.

Интегралът

$$\int f(x).g'(x)dx$$

може да се означи с

$$\int f(x).dg(x).$$

Това свойство се нарича внасяне под знака на диференциала.

Пример. Пресметнете интеграла

$$J_1 = \int \left(x^4 + 12x^3 - 3x + 5\right)dx.$$

Математическо решение. От формула (1):

$$J_1 = \int x^4 dx + 12\int x^3 dx - 3\int xdx + 5\int dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 12.\frac{x^4}{4} - 3.\frac{x^2}{2} + 5 + C = \frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5 + C.$$

Решение с Maple.

```
>J[1]:=int(x^4+12*x^3-3*x+5,x);
```

Неопределен интеграл (антидиференциране)

$$J_1 := \frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5 + C.$$

Резултатът е: $J_1 + C$, i.e. $\frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5 + C$.

По-добре е да се изполва:

```
>J[1]:=Int(x^4+12*x^3-3*x+5,x)=
 int(x^4+12*x^3-3*x+5,x);
```

$$J_1 := \int \left(x^4 + 12x^3 - 3x + 5\right) dx = \frac{x^5}{5} + 3x^4 - \frac{3x^2}{2} + 5.$$

Проверка:

```
>diff(J[1],x);
```

$$x^4 + 12x^3 - 3x + 5.$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$J_2 = \int 4 sin^3 x.cos\, xdx$$

Математическо решение. От (1) иправилата

$$J_2 = 4\int sin^3 x.\left(cos\, x\right) dx = 4\int sin^3 xd\, sin\, x = 4.\frac{\left(sin\, x\right)^4}{4} =$$

$$= sin^4 x + C.$$

Решение с Maple.

```
>J[2]:=Int(4*sin(x)^3*cos(x),x)=
 int(4*sin(x)^3*cos(x),x);;
```

$$J_2 := \int 4 sin^3 x.cos\, xdx = sin\left(x\right)^4$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}}.$$

Математическо решение. От (17) и правилата

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx 2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\left(2\sqrt{2}x\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} arcsin\left(2\sqrt{2}x\right) + C$$

Решение с Maple.

```
>I[1]:=Int(1/sqrt(1-8*x^2),x)=
 int(1/sqrt(1-8*x^2),x);
```

$$I_1 := \int \frac{dx}{\sqrt{1-8x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} arcsin\left(2\sqrt{2}x\right)$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_2 = \int \frac{1+cos^2 x}{cos^2 x} dx .$$

Математическо решение. От (7) и правилата

$$I_2 = \int \left(\frac{1}{cos^2 x} + 1 \right) dx = \int \frac{1}{cos^2 x} dx + \int 1 dx = tgx + x + C .$$

Решение с Maple.

```
>I[2]:=int((1+cos(x)^2)/(cos(x)^2),x);
```

$$I_2 := \frac{sin(x)}{cos(x)} + x ,$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_3 = \int \frac{2x\,sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x} dx ,$$

Математическо решение. От (1), (8) и правилата

$$I_3 = \int \left(\frac{2x\,sin^2 x}{sin^2 x} + \frac{cos^2 x}{sin^2 x} \right) dx = 2 \int x dx + \int \frac{1 - sin^2 x}{sin^2 x} dx =$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{sin^2 x} dx - \int 1 dx = x^2 - cotgx - x + C .$$

Решение с Maple.

```
>I[3]:=int((2*x*sin(x)^2+cos(x)^2)/
sin(x)^2,x);
```

$$I_3 := x^2 - cot\,g(x) - x$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_4 = \int \frac{dx}{(arcsin\, x)^2 \sqrt{1-x^2}},$$

Математическо решение. От (1), (17) и правилата

$$I_4 = \int (arcsin\, x)^{-2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \int (arcsin\, x)^{-2}\, d\, arcsin\, x = -\frac{1}{arcsin\, x} + C .$$

Решение с Maple.

```
>I[4]:=int(1/(arcsin(x)^2*sqrt(1-x^2)),x);
```

$$I_4 := -\frac{1}{arcsin(x)}$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_5 = \int \frac{\sqrt{ln\, x}}{x} dx,$$

Математическо решение. От (4), (1) и правилата

$$I_5 = \int (ln\, x)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x} \right) dx = \int (ln\, x)^{\frac{1}{2}}\, d\, ln\, x = \frac{(ln\, x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2\, ln\, x \sqrt{ln\, x}}{3} + C .$$

Решение с Maple.

```
>I[5]:=int(sqrt(ln(x))/x,x);
```

$$I_5 := \frac{2}{3} ln(x)^{\frac{3}{2}}$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_6 = \int e^x . sin\, e^x dx .$$

Математическо решение. От (5), (1) и правилата

$$I_6 = \int \sin e^x \left(e^x\right) dx = \int \sin e^x de^x = -\cos e^x + C$$

Решение с Maple.

```
>I[6]:=int(exp(x)*sin(exp(x)),x);
```

$$I_6 := -\cos\left(e^x\right)$$

Пример. Пресметнете интеграла

$$I_7 = \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx\,.$$

Математическо решение. От (12) и правилата

$$I_7 = \int \frac{\left(x^3\right)}{x^8 - 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(x^4\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} dx^4 =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - 2}{x^4 + 2} \right| + C\,.$$

Решение с Maple.

```
>I[7]:=Int(x^3/(x^8-2),x)=
 int(x^3/(x^8-2),x);
```

$$??\, I_7 := \int \frac{x^3}{x^8 - 2} dx \;//$$

.3. Задачи за упражнение

Изчислете интегралите:

(1) $$\int \left(3^x + 3^{3x}\right) dx\,,$$

Неопределен интеграл (антидиференциране)

(2) $$\int \frac{sin\,xdx}{\sqrt{cos^2 x}},$$

(3) $$\int \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}}dx,$$

(4) $$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx,$$

(5) $$\int \frac{\left(arccos\,x \right)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

(6) $$\int \left(5x+1 \right)^5 dx,$$

(7) $$\int \frac{dx}{2x-3},$$

(8) $$\int \frac{cos\,x}{\sqrt{sin^3 x}}dx,$$

(9) $$\int \frac{ln^3 x}{x}dx,$$

(10) $$\int \frac{dx}{\left(x+1 \right)\sqrt{x}},$$

(11) $$\int \frac{xdx}{1+x^4},$$

(12) $$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(4-x \right)},$$

(13) $$\int \frac{sin\,x\,cos\,x}{1+sin^2 x}dx,$$

(14) $$\int sin\left(3-2x \right)dx,$$

(15) $$\int tgxdx,$$

(16) $$\int \frac{1+ln\,x}{x}dx,$$

(17) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$,

(18) $\displaystyle\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$,

(19) $\displaystyle\int \frac{2x-\sqrt{arcsin\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

(20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

(21) $\displaystyle\int \frac{1+ln\,x}{2x}dx$.

.4. Тест за самоподготовка

(1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^2}$,

(2) $\displaystyle\int e^{cos^2 x} sin\,2xdx$,

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$,

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$,

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x.cos^2\left(1+ln\,x\right)}$,

(6) $\displaystyle\int \sqrt[7]{\left(x-7\right)^2}dx$,

(7) $\displaystyle\int cos\,3xdx$.

.5. Въпроси за самоподготовка

1. Напишете определнията за неопределен интеграл.
2. Напишете правилата за интегриране.
3. Напишете формулите за интегриране, които знаете.
4. Обяснете значението на командите на *Maple*: **`int(f,x)`**, **`Int(f,x)`**, **`diff(f,x)`**. Дайте примери.