Устойчивост на критичните точки в линейни системи от обикновени диференциални уравнения (СОДУ)

В тази глава ще използваме *Mathematica* за да изследваме устойчивостта на критични точки на двойка линейни СОДУ.

Ако СОДУ е линейна и хомогенна от вида $\boldsymbol{X' = AX}$ с постоянни коефициенти и неособена матрица $\boldsymbol{A}$, тогава единствена критична точка е началото на координатната система и нейната стабилност се изследва с изучаването на собствените стойности на $\boldsymbol{A}$.

Пример 1.

Да сравним орбитите на следните две СОДУ и да уточним различното им поведение, като анализираме устойчивостта на критичната точка.

а) $x' = 3x-y,\ y' = 2x + y.$
б) $x' = x +5y,\ y' = -x - y.$
в) $x' = x -5y,\ y' = -x - y.$

Решение

ЗАБЕЛЕЖКА: Тези три СОДУ са автономни, линейни коефициенти, с единствена критична точка в началото на координатната система.
Някои траектории се представят с фазови равнини.

Случай а.

Записване на системите и решане с командата **DSolve**

```
sis31a = {x'[t] == 3 x[t] - y[t], y'[t] == 2 x[t] + y[t]}
```

$\{x'[t] == 3\,x[t] - y[t],\ y'[t] == 2\,x[t] + y[t]\}$

```
solgen31a = DSolve[sis31a, {x[t], y[t]}, t]
```

$\{\{x[t] \to -e^{2t}\,C[2]\,\mathrm{Sin}[t] + e^{2t}\,C[1]\,(\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$
$y[t] \to e^{2t}\,C[2]\,(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 2\,e^{2t}\,C[1]\,\mathrm{Sin}[t]\}\}$

Дефинират се решенията *x(t)* и *y(t):*

```
x[t_] = solgen31a[[1, 1, 2]]
```

$-e^{2t}\,C[2]\,\mathrm{Sin}[t] + e^{2t}\,C[1]\,(\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t])$

```
y[t_] = solgen31a[[1, 2, 2]]
```

$e^{2t}\,C[2]\,(\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 2\,e^{2t}\,C[1]\,\mathrm{Sin}[t]$

По-удобно е някои решения да генерираме с командата **Table**

```
solpar31a = Table[{x[t], y[t]} /. {C[1] -> i, C[2] -> j},
  {i, -6, 6, 4}, {j, -6, 6, 4}]
```

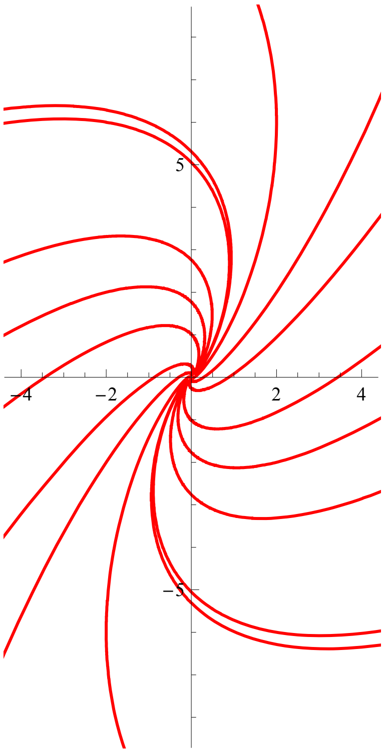
```
{{{6 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {2 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-2 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-6 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]}},
  {{6 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {2 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-2 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-6 ⅇ^(2 t) Sin[t] - 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) - 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]}},
  {{6 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {2 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-2 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-6 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 4 ⅇ^(2 t) Sin[t]}},
  {{6 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {2 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    -2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-2 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    2 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]},
   {-6 ⅇ^(2 t) Sin[t] + 6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] + Sin[t]),
    6 ⅇ^(2 t) (Cos[t] - Sin[t]) + 12 ⅇ^(2 t) Sin[t]}}}
```

Модифицираме предишната таблица с командата **Flatten,** за да запишем списъка във вид, удобен за графично представяне.

```
solpar31abis = Flatten[solpar31a, 1]
```

$$\{\{6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] - 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) - 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 4 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$-2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-2 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$2 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\},$$
$$\{-6 e^{2t} \mathrm{Sin}[t] + 6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Sin}[t]),$$
$$6 e^{2t} (\mathrm{Cos}[t] - \mathrm{Sin}[t]) + 12 e^{2t} \mathrm{Sin}[t]\}\}$$

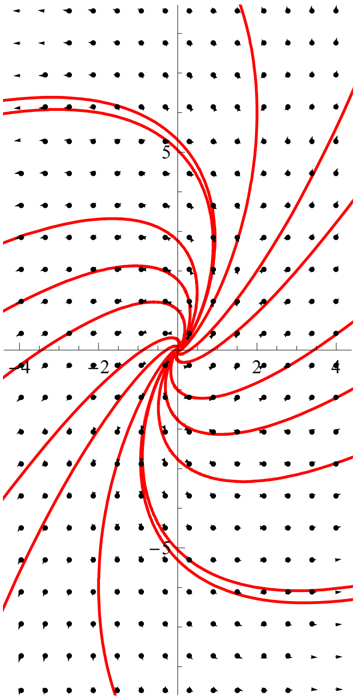
```
graf131a = ParametricPlot[Evaluate[solpar31abis], {t, -2, 0.5`},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.008`]}}]
```



Решенията и направленията на полето са представени заедно на следната графика:

```
graf231a = (Needs["VectorFieldPlots`"];
   VectorFieldPlots`VectorFieldPlot[{3 x - y, 2 x + y},
    {x, -15, 15}, {y, -20, 20}, PlotPoints → 50,
    DisplayFunction → Identity, BaseStyle → {GrayLevel[0.2`]}]);
```

```
Show[graf131a, graf231a]
```



Траекториите се движат далече от началото на координатната система (във вид на спирала), когато t нараства и са близки до началото за t по-малко от 0. Това поведение може да се обясни като се намерят собствените стойности на матрицата от коефициентите.

Матрицата, съответна на СОДУ е дефинира като:

$$a = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
{{3, -1}, {2, 1}}
```

Нейните собствени стойности са:

```
Eigenvalues[a]
```

```
{2 + i, 2 - i}
```

Получаваме, че началото на координатната система е нестабилен спирален фокус, тъй като собствените стойности са комплексно-спрегнати и имат положителна реална част.

■ Случай b.

Изчистваме всички присвоени стойности и дефинираме СОДУ:

```
Clear[x, y]
```

```
sis31b = {x'[t] == x[t] + 5 y[t], y'[t] == -x[t] - y[t]}
```

```
{x′[t] == x[t] + 5 y[t], y′[t] == -x[t] - y[t]}
```

Решаваме системата с командата **DSolve**:

```
solgen31b = DSolve[sis31b, {x[t], y[t]}, t]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{5}{2} C[2] \operatorname{Sin}[2 t] + \frac{1}{2} C[1] (2 \operatorname{Cos}[2 t] + \operatorname{Sin}[2 t]),\ y[t] \to \frac{1}{2} C[2] (2 \operatorname{Cos}[2 t] - \operatorname{Sin}[2 t]) - \frac{1}{2} C[1] \operatorname{Sin}[2 t]\right\}\right\}$$

Сега дефинирамеhe решенията *x(t)* и *y(t)* :

x[t_] = solgen31b[[1, 1, 2]]

$$\frac{5}{2}\,C[2]\,Sin[2\,t]+\frac{1}{2}\,C[1]\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t])$$

y[t_] = solgen31b[[1, 2, 2]]

$$\frac{1}{2}\,C[2]\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-\frac{1}{2}\,C[1]\,Sin[2\,t]$$

Използваме инструкцията **Table** за по-прегледно представяне на решенията:

**solpar31b = Table[{x[t], y[t]} /. {C[1] -> i, C[2] -> j},
{i, 2, 8, 3}, {j, 2, 8, 3}]**

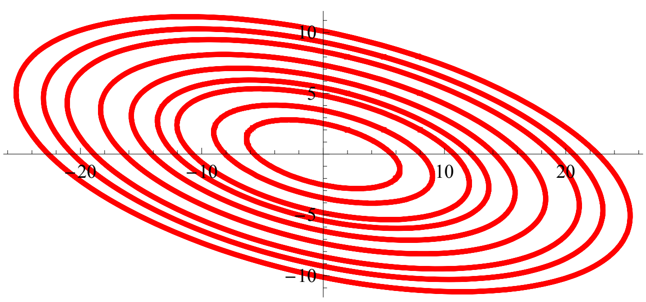
$$\Big\{\Big\{\{2\,Cos[2\,t]+6\,Sin[2\,t],\ 2\,Cos[2\,t]-2\,Sin[2\,t]\},$$
$$\Big\{2\,Cos[2\,t]+\frac{27}{2}\,Sin[2\,t],\ \frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-Sin[2\,t]\Big\},$$
$$\{2\,Cos[2\,t]+21\,Sin[2\,t],\ 4\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-Sin[2\,t]\}\Big\},$$
$$\Big\{\Big\{5\,Sin[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),\ 2\,Cos[2\,t]-\frac{7}{2}\,Sin[2\,t]\Big\},$$
$$\Big\{\frac{25}{2}\,Sin[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),$$
$$\frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-\frac{5}{2}\,Sin[2\,t]\Big\},$$
$$\Big\{20\,Sin[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),$$
$$4\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-\frac{5}{2}\,Sin[2\,t]\Big\}\Big\},$$
$$\Big\{\{5\,Sin[2\,t]+4\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),\ 2\,Cos[2\,t]-5\,Sin[2\,t]\},$$
$$\Big\{\frac{25}{2}\,Sin[2\,t]+4\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),$$
$$\frac{5}{2}\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-4\,Sin[2\,t]\Big\},$$
$$\{20\,Sin[2\,t]+4\,(2\,Cos[2\,t]+Sin[2\,t]),$$
$$4\,(2\,Cos[2\,t]-Sin[2\,t])-4\,Sin[2\,t]\}\Big\}\Big\}$$

Получената таблица модифицираме с командата **Flatten** за да можем да начертаем графиката.

```
solpar31bbis = Flatten[solpar31b, 1]
```

$$\left\{\{2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+6\,\mathrm{Sin}[2\,t],\ 2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-2\,\mathrm{Sin}[2\,t]\},\right.$$
$$\left\{2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\frac{27}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t],\ \frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-\mathrm{Sin}[2\,t]\right\},$$
$$\{2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+21\,\mathrm{Sin}[2\,t],\ 4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-\mathrm{Sin}[2\,t]\},$$
$$\left\{5\,\mathrm{Sin}[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ 2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\frac{7}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t]\right\},$$
$$\left\{\frac{25}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ \frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-\frac{5}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t]\right\},$$
$$\left\{20\,\mathrm{Sin}[2\,t]+\frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ 4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-\frac{5}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t]\right\},$$
$$\{5\,\mathrm{Sin}[2\,t]+4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ 2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-5\,\mathrm{Sin}[2\,t]\},$$
$$\left\{\frac{25}{2}\,\mathrm{Sin}[2\,t]+4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ \frac{5}{2}\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-4\,\mathrm{Sin}[2\,t]\right\},$$
$$\left.\{20\,\mathrm{Sin}[2\,t]+4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]+\mathrm{Sin}[2\,t]),\ 4\,(2\,\mathrm{Cos}[2\,t]-\mathrm{Sin}[2\,t])-4\,\mathrm{Sin}[2\,t]\}\right\}$$

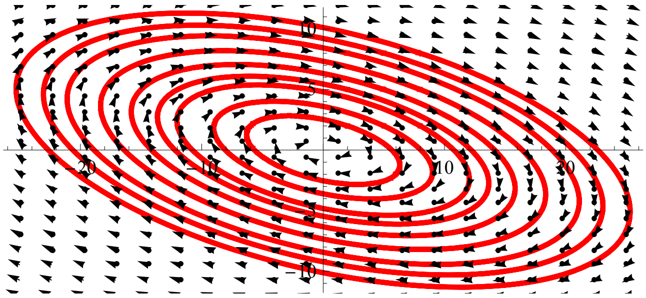
```
graf131b = ParametricPlot[Evaluate[solpar31bbis], {t, 0, 2 π},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.008`]}}]
```



Следва графика едновременно на решенията и направленията на полето:

```
graf231b = (Needs["VectorFieldPlots`"];
  VectorFieldPlots`VectorFieldPlot[{x + 5 y, -x - y},
   {x, -25, 25}, {y, -12, 12}, PlotPoints → 20,
   DisplayFunction → Identity, BaseStyle → {GrayLevel[0.2`]}]);
```

```
Show[graf131b, graf231b]
```



Траекториите са затворени криви, в случая са елипси, с център в началото на координатната система. Това поведение може да се обясни чрез намирането на собствените стойности на матрицата на коефициентите.

Матрицата, съответна на СОДУ се дефинира с:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 5}, {-1, -1}}
```

Найните собствени стойности се изчисляват с командата:

```
Eigenvalues[a]
```

```
{2 i, -2 i}
```

Началото на координатната система е стабилен център, тъй като собствените стойности са чисто имагинерни числа.

■ Случай в.

Изтриваме всички присвоено дотук стойности и дефинираме следващата СОДУ:

```
Clear[x, y]
```

```
sis31c = {x'[t] == x[t] - 5 y[t], y'[t] == -x[t] - y[t]}
```

$$\{x'[t] == x[t] - 5\,y[t],\ y'[t] == -x[t] - y[t]\}$$

Системата решаваме с командата:

```
solgen31c = DSolve[sis31c, {x[t], y[t]}, t]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{1}{12}\,e^{-\sqrt{6}\,t}\left(6-\sqrt{6}+6\,e^{2\sqrt{6}\,t}+\sqrt{6}\,e^{2\sqrt{6}\,t}\right)C[1]-\frac{5\,e^{-\sqrt{6}\,t}\left(-1+e^{2\sqrt{6}\,t}\right)C[2]}{2\sqrt{6}},\ y[t]\to-\frac{e^{-\sqrt{6}\,t}\left(-1+e^{2\sqrt{6}\,t}\right)C[1]}{2\sqrt{6}}-\frac{1}{12}\,e^{-\sqrt{6}\,t}\left(-6-\sqrt{6}-6\,e^{2\sqrt{6}\,t}+\sqrt{6}\,e^{2\sqrt{6}\,t}\right)C[2]\right\}\right\}$$

Решенията *x(t)* и *y(t)* се дефинират като:

x[t_] = solgen31c[[1, 1, 2]]

$$\frac{1}{12} e^{-\sqrt{6}\, t} \left(6 - \sqrt{6} + 6\, e^{2\sqrt{6}\, t} + \sqrt{6}\, e^{2\sqrt{6}\, t}\right) C[1] - \frac{5\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(-1 + e^{2\sqrt{6}\, t}\right) C[2]}{2\sqrt{6}}$$

y[t_] = solgen31c[[1, 2, 2]]

$$-\frac{e^{-\sqrt{6}\, t} \left(-1 + e^{2\sqrt{6}\, t}\right) C[1]}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{12} e^{-\sqrt{6}\, t} \left(-6 - \sqrt{6} - 6\, e^{2\sqrt{6}\, t} + \sqrt{6}\, e^{2\sqrt{6}\, t}\right) C[2]$$

Генерираме решенията с командата **Table**:

```
solpar31c = Simplify[Table[{x[t], y[t]} /. {C[1] -> i, C[2] -> j},
   {i, 1, 5, 2}, {j, 1, 5, 2}]]
```

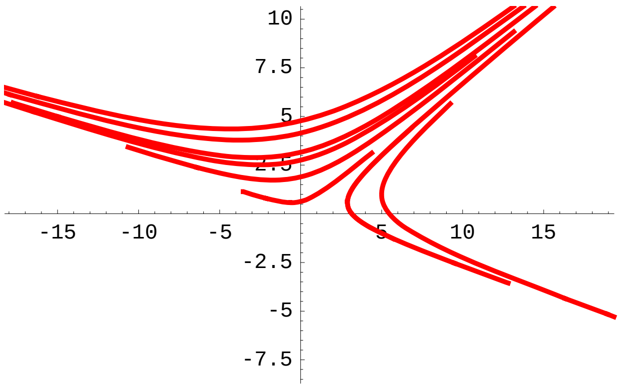
$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big\{\Big\{\frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + 2\sqrt{6} + \left(3 - 2\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + \sqrt{6} - \left(-3 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + 7\sqrt{6} + \left(3 - 7\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(9 + 2\sqrt{6} + \left(9 - 2\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(1 + 4\sqrt{6} + \left(1 - 4\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(5 + \sqrt{6} - \left(-5 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}\Big\}, \\
&\Big\{\Big\{\frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(9 + \sqrt{6} - \left(-9 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + 2\sqrt{6} + \left(3 - 2\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + 2\sqrt{6} + \left(3 - 2\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + \sqrt{6} - \left(-3 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(9 + 11\sqrt{6} + \left(9 - 11\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(15 + 4\sqrt{6} + \left(15 - 4\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}\Big\}, \\
&\Big\{\Big\{\frac{5}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(1 + e^{2\sqrt{6}\, t}\right),\ \frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(1 + \sqrt{6} - \left(-1 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{5}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + \sqrt{6} - \left(-3 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{1}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(9 + 4\sqrt{6} + \left(9 - 4\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}, \\
&\quad \Big\{\frac{5}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + 2\sqrt{6} + \left(3 - 2\sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right), \\
&\quad \frac{5}{6}\, e^{-\sqrt{6}\, t} \left(3 + \sqrt{6} - \left(-3 + \sqrt{6}\right) e^{2\sqrt{6}\, t}\right)\Big\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

Сега модифицираме предишната таблица с командата **Flatten** за да може да построим графиките на функциите.

solpar31cbis = Flatten[solpar31c, 1]

$$\left\{\left\{\frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+2\sqrt{6}+\left(3-2\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+\sqrt{6}-\left(-3+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+7\sqrt{6}+\left(3-7\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(9+2\sqrt{6}+\left(9-2\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(1+4\sqrt{6}+\left(1-4\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(5+\sqrt{6}-\left(-5+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(9+\sqrt{6}-\left(-9+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+2\sqrt{6}+\left(3-2\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+2\sqrt{6}+\left(3-2\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+\sqrt{6}-\left(-3+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(9+11\sqrt{6}+\left(9-11\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(15+4\sqrt{6}+\left(15-4\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(1+e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{2} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(1+\sqrt{6}-\left(-1+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left\{\frac{5}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+\sqrt{6}-\left(-3+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{1}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(9+4\sqrt{6}+\left(9-4\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{5}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+2\sqrt{6}+\left(3-2\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right),\ \frac{5}{6} e^{-\sqrt{6}\,t}\left(3+\sqrt{6}-\left(-3+\sqrt{6}\right)e^{2\sqrt{6}\,t}\right)\right\}\right\}$$

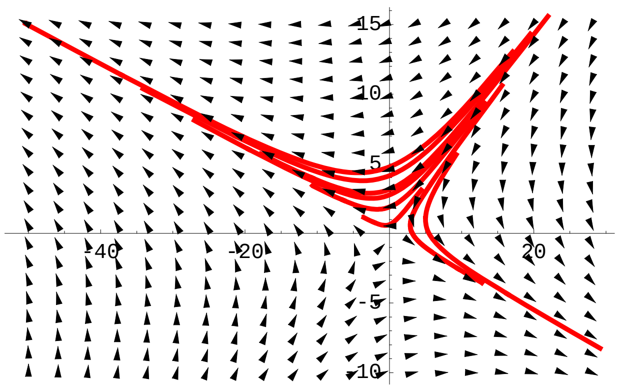
```
graf131c = ParametricPlot[Evaluate[solpar31cbis], {t, -0.5`, 1},
  PlotStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.008`]}}]
```



Едновременно представяме решенията и направленията на полето:

```
graf231c = (Needs["VectorFieldPlots`"];
   VectorFieldPlots`VectorFieldPlot[{x - 5 y, -x - y},
    {x, -50, 28}, {y, -10, 15}, PlotPoints → 20,
    DisplayFunction → Identity, BaseStyle → {GrayLevel[0.2`]}]);
```

```
Show[graf131c, graf231c]
```



Изчисляваме собствените стойности на съответната матрица от коефициентите на СОДУ и обясняваме вида на точката.

Матрицата на СОДУ се дефинира като:

a = $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

```
{{1, -5}, {-1, -1}}
```

Собствените й стойности намираме с командата:

```
Eigenvalues[a]
```

$\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

Началото на координатната система е седлова точка, тъй като собствените стойности сега са реални и с различни знаци.

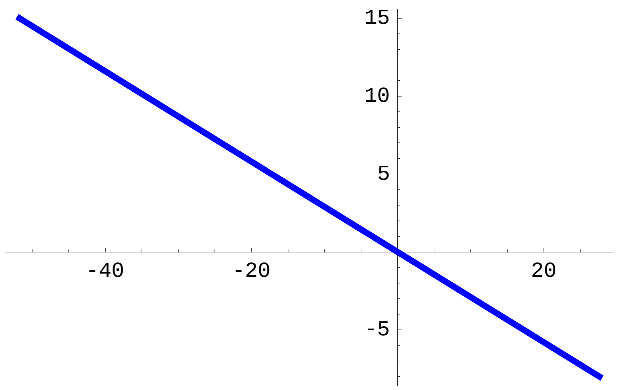
Изчисляваме собствените вектори и начертаваме правите линии и направленията.

```
Eigenvectors[a]
```

$\{\{-1+\sqrt{6}, 1\}, \{-1-\sqrt{6}, 1\}\}$

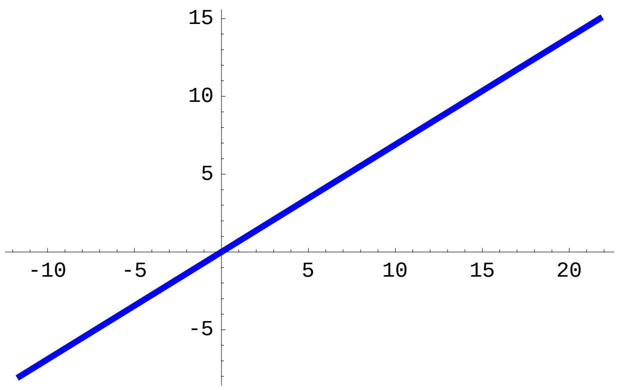
Правата линия, съответна на собствения вектор за отрицателната собствена стойност е:

```
graf331c = ParametricPlot[{(-1 - √6) t, t}, {t, -8, 15},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01`]}]
```



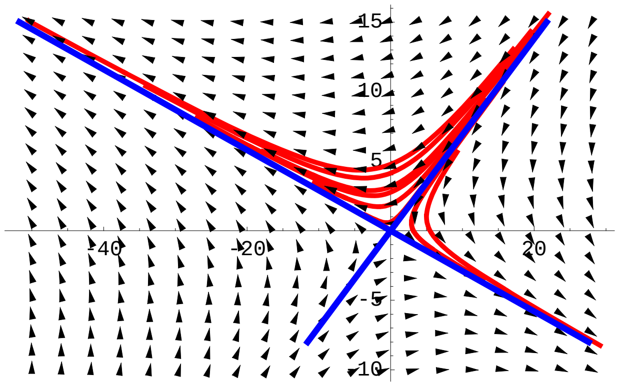
Правата линия, съответна на собствения вектор за положителната собствена стойност е:

```
graf431c = ParametricPlot[{(-1 + √6) t, t}, {t, -8, 15},
  PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.01`]}]
```



Тогава за четирите графики получаваме:

```
Show[graf131c, graf231c, graf331c, graf431c]
```



Можем да кажем, че всяка траектория, започваща от точка върху правата линия, съответна на отрицателната собствена стойност, остава върху нея и се стреми към началото на координатната система. Всяка траектория, започваща от точка, лежаща на правата, съответна на положителната собствена стойност, остава под нея и клони към началото на координатната система.