

Интерполиране и екстраполиране

Постановка на задачата. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някакъв интервал и е известна таблица от стойностите ѝ

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Без ограничение на общността считаме, че точките x_i са подредени по големина и различни, т.е. $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Търси се приближаваща функция $\varphi(x)$, такава че

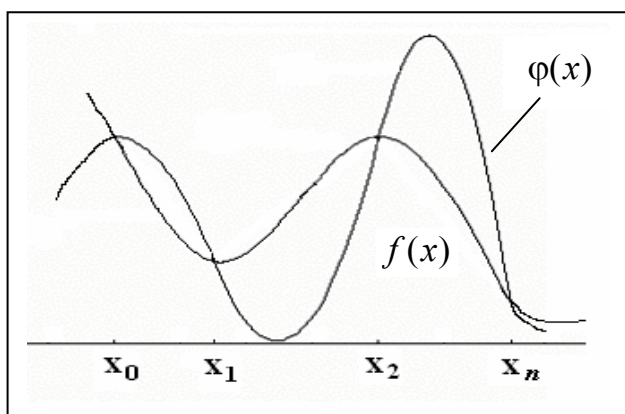
$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Тази задача се решава при предварителен избор на функциите $\varphi(x)$.

От (1) за даден клас функции се получава формула $\varphi(x) \approx f(x)$, която може да се използва за приближено изчисляване на $f(x)$ в произволна точка x^* . Когато $x^* \in [x_0, x_n]$, казваме, че $\varphi(x)$ “интерполира” $f(x)$. Когато $x^* \notin [x_0, x_n]$, т.е. е извън от интервала, казваме, че $\varphi(x)$ “екстраполира” $f(x)$.

Определение. Точките x_0, x_1, \dots, x_n се наричат възли на интерполирането, а получената функция $\varphi(x)$, удовлетворяваща условието (1) се нарича интерполираща функция..

Графично условието (1) означава, че интерполиращата функция $\varphi(x)$ минава през точките (x_i, y_i) , тъй като има в x_i същите стойности като $f(x)$ - виж следващата фиг.



Примери.

1) Ако изберем системата от функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ и разгледаме всички линейни комбинации по тази система, ще получим класа на полиномите от n -та степен $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Интерполационният полином ще се определя от условието

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

2) Ако изберем системата функции

$$\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots$$

ще получим класа на тригонометричните полиноми от n -та степен $T_n(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ и т.н.

Според вида на всяка конкретна функция $f(x)$ най-напред се определя класа приближаващи функции, а след това и съответната интерполираща функция (полином) $\varphi(x)$ по условието (1).