Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика

==

Олимпиада по математика
e-Math’2015

Студентите от ФМИ са поканени да участват в олимпиадата. Тя се организира по случай 20 години от въвеждането на система *Wolfram Mathematica* в обучението във ФМИ. Задачите трябва да са решени с помощта на математически софтуер (желателно с *Mathematica*) с електронно устройство (компютър, лаптоп, таблет или мобилен телефон).

Олимпиадата ще се проведе в 2 кръга:

А) Задочен кръг: от 17 февруари до 6 март, 2015.

Б) Очен кръг: на 7 март (събота) от 13 ч. в 541 зала.

Всеки студент може да се явява и на двата кръга.

Решенията трябва да се представят във файлов формат и да съдържат в тях описание на идеите, логиката и интерпретация и/или проверка на решението. Решенията се изпращат на следните имейли: snow@uni-plovdiv.bg, kulina@uni-plovdiv.bg

Резултатите ще бъдат обявени в сайта на ФМИ до 5 дни след изтичане на срока от всеки кръг.

ЗАДАЧИ за задочен кръг, срок до 06.03.2015 г.

Задача 1.

А) Проверете, че всяко от числата 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 се дели на 17.

Б) Проверете, че детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, съставена от цифрите на същите числа, също се дели на 17.

Задача 2. Дадена е матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

А) Намерете детерминантата на A;

Б) Намерете детерминантата на матрицата $B = A - p.E$, където p е произволно число, E – единичната матрица;

В) Намерете всички стойности на параметъра p, за които det (B) = 0;

Г) Намерете за кои стойности на p, det (B) >0.

Задача 3. Дадени са матриците A = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 17 & 10 & -13 \\ 14 & 9 & -13 \\ 21 & 13 & -18 \end{pmatrix}$.

А) Да се намери неизвестната матрица X, за която $A.X^T = B$, където с X^T е означена транспонираната матрица на матрицата X;

Б) Да се намери матрицата $(X.X^T)^{-1}$.

Задача 4. Дадена е редицата $a_1=1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

А) Да се намерят членовете на редицата: $a_2, a_3, \dots, a_{103}$.

Б) Да се покаже, че за всяко $n= 1,2, \dots, 100$, $a_n = 2^n - 1$.

Задача 5.

А) Да се намерят корените на полинома
$12x^7 + 108x^6 + 123x^5 - 1110x^4 - 2502x^3 + 1452x^2 + 3807x - 1890$;

Б) Да се построи графиката и да се визуализират реалните корени на полинома в различни цветове в подходящ интервал;

В) За кои стойности на p, следващият полином има за двоен корен числото –3:
$3x^6 + (-6p+9)x^5 + (3p^2 - 18p - 45)x^4 + (9p^2 + 90p - 57)x^3 + (-45p^2 + 114p + 90)x^2 +$
$(-57p^2 - 180p)x + 90p^2$.

Задача 6. За функцията $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x}$:

А) Определете дефиниционната област;

Б) Начертайте графиката на функцията в подходящ интервал;

В) Определете координатите на пресечната точка на графиката на $f(x)$ с графиката на функцията $\mathrm{g}(x) = -\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x} + 9$;

Г) Пресметнете сумата: $\dfrac{1}{f(3)} - \dfrac{1}{f(4)} + \dfrac{1}{f(5)} - \ldots - \dfrac{1}{f(100)}$.

Задача 7. За функцията $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

А) Начертайте графиката в подходящ интервал и наклонената й асимптота $y = -x$;

Б) Начертайте допирателните към графиката на $f(x)$ в точките $x_{1,2} = \pm 1,5$;

В) Намерете аналитичния израз на функцията $\mathrm{g}(x) = f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$;

Г) Определете дефиниционната област на $\mathrm{g}(x)$ и начертайте графиката на функцията в подходящ интервал.

Задача 8. Дадена е функцията $f(x) = \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{5+x}$.

А) Да се визуализират точките с координати $(n, f(n))$ за $n = 2, 4, 6, \ldots, 200$;

Б) Да се визуализират точките с координати $(n, f(-n))$ за $n = 2, 4, 6, \ldots, 200$ в различен цвят. Ще се пресекат ли двете графики при $n \to \infty$?

В) Да се намерят границите $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$.

Задача 9. Разглеждаме изпъкнал четириъгълник ABCD с координати на върховете A(0,0), B(1,0), D(0,1) и C(a,b), където $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b \geq 1$. Точките A_1, B_1, C_1, D_1 са среди на страните AB, BC, CD и DA съответно. Четириъгълникът KLMN е образуван от пресечните точки на правите $AB_1 \cap DA_1 = K$, $AB_1 \cap BC_1 = L$, $CD_1 \cap BC_1 = M$, $CD_1 \cap DA_1 = N$, както е показано на чертежа.

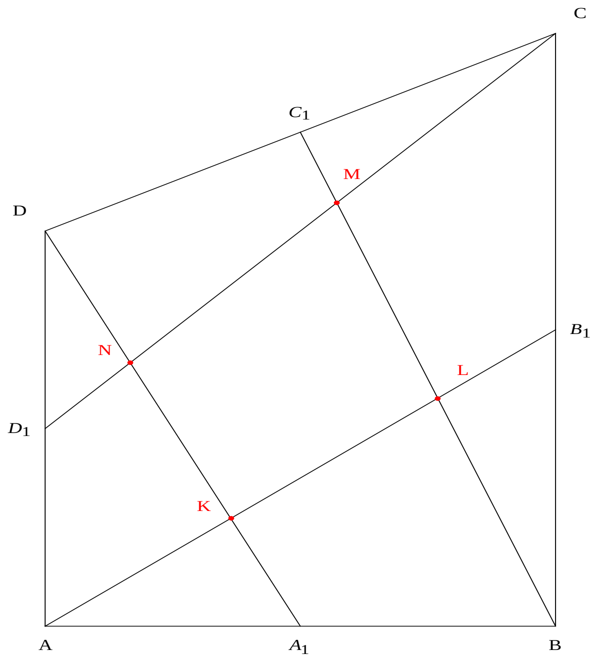
А) Намерете координатите на точките A_1, B_1, C_1, D_1;

Б) Намерете координатите на точките K, L, M и N като пресечни точки на съответните прави;

В) Намерете лицата на четириъгълниците ABCD и KLMN;

Г) Докажете, че за всяко a и b, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b \geq 1$ е изпълнено равенството

$$\frac{1}{6}S_{ABCD} \leq S_{KLMN} \leq \frac{1}{5}S_{ABCD}.$$



Упътване: Изчислете първо с конкретни стойности на параметрите a и b.

Задача 10. Да се въведат координати на три произволни точки в равнината.

А) Да се построят всички окръжности, за които е изпълнено:

1. Имат за център някоя от точките;
2. Минават през втората от точките, така че третата въведена точка е външна за окръжността.

Б) Да се построят допирателните от външната точка към построената в А) окръжност.

Задача 11. Нека R(2,15) е двумерен целочислен масив, където числата в скобите са размерностите на масива. Известно е, че сред елементите на масива има само два, които са равни помежду си. Напечатайте техните индекси.

Задача 12. Да се напише програма (или програмен модул), която намира всички възможни решения на следната задача:

Семейство разглежда 11 вида стоки в супермаркет със следните цени в лв:

48, 56, 78, 115, 135, 156, 172, 184, 356, 452, 615.

На касата семейството е заплатило обща сума от 796 лв. Какви от тези стоки си е купило, ако е известно, че не са купени повече от 11 броя артикули?

Пожелаваме на всички участници успешно представяне!

Катедра „Приложна математика и моделиране”

16.02.2015 г.