

ТРАДИЦИИ, ПОСОКИ, ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА  
Юбилейна национална научна конференция с международно участие  
Смолян, 19–21 октомври, 2012 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНОТО И ЦЕЛОЧИСЛЕНО ОПТИМИРАНЕ В МЕТАЛУРГИЯТА

Дойчин Бояджиев

Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет  
dtb@uni-plovdiv.bg

## APPLICATION OF LINEAR AND INTEGER PROGRAMMING IN METALLURGY

Doychin Boyadzhiev

Faculty of Mathematics and Informatics, University of Plovdiv, Bulgaria  
dtb@uni-plovdiv.bg

***Abstract.** The work presents an attempt to examine the application of linear and integer programming models for processes in metallurgy. When restrictive conditions consistent with the composition and availability of raw materials for the zinc production are set, linear programming is used to determine optimal technological composition for a production batch. The formulated discrete model allows practical implementation of the obtained solution. The methodology is illustrated using Excel programs.*

***Key words:** linear programming, integer programming, wet metallurgy*

### Цел

Съвременното развитие на химическата промишленост поражда редица проблеми. Някои от тях са свързани със създаването на методи и процеси, целящи получаване на висококачествени продукти с възможно най-малко капиталовложения, разходи на суровини, енергия и труд. Паралелно с това нарастват изискванията за комплексното и дълбочинно използване на суровините и максималното оползотворяване на енергията. Интензивното развитие на цинковата промишленост е една от главните причини за непрекъснатото намаляване на рудните изкопаеми, богати на цинк. Това е причина по-голямата част от преработваните в България суровини да са вносни. Преработваните сулфидни цинкови концентрати са много разнообразни по своя гранулометричен, химичен, фазов и минералогичен състав. Това от своя страна води до определени трудности при тяхната преработка. В пещите за кипящ слой (ПКС) в двата ни цинкови завода (КЦМ – АД, гр. Пловдив и ОЦК – ЕООД, гр. Кърджали) се преработват обикновено между 5 и 8 различни цинкови концентрати. Това налага предварително изчисляване и избиране на най-подходящата шихта, спазвайки технологичните изисквания. Поради голямото разнообразие на цинковите концентрати е необходимо използването на система за оптимално шихтоване при условията на

---

<sup>1</sup> Тази работа е частично спонсорирана от научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ

пържене в ПКС. В тази връзка целта на настоящата работа е използвайки идеите на математическото оптимизиране да се създаде система за организация на процеса „шихтоване“.

### Линеен оптимизационен модел на процеса „шихтоване“

Цинкът се получава по два основни метода – пирометалургичен и хидрометалургичен. Понастоящем по-голямата част от световния добив (около 80%) е от хидрометалургични заводи. Именно по този метод се получава цинкът в КЦМ-АД и ОЦК – ЕООД (Боянов, Сандалски и др. 2010). Предимствата на този метод са: получаване на цинк с висока чистота; комплексно използване на суровините; по-добри санитарно-хигиенни условия в производството; опазване на околната среда и др. В началния етап на хидрометалургичния метод цинковият концентрат се подлага на окислително пържене при температура от 900° – 980°С в ПКС.

Поради недостиг на български концентрати се налага да се преработват и вносни суровини. Направеното сравнение на техния химичен, фазов и гранулометричен състав показва наличието на значителни различия. Това оказва съществено влияние върху процесите, протичащи в ПКС и по-нататъшната преработка на цинковата угарка. Концентратите с различно съдържание на основните компоненти се смесват за постигане на оптимални концентрации на основните компоненти в материала (шихтата), подаван в пещта – „шихтоване“.

При цинковото производство се контролират главно 18 компонента. Към една част от тях има изисквания да бъдат с концентрация, по-ниска от максимално допустимата стойност, а към друга с по-висока от минимално допустима. Това осигурява оптимално протичане на процесите в ПКС и получаване на стабилна по състав шихта. Във фигура 1 са представени основните компоненти и допустимите стойности за тях за 15 рудни концентрата, налични към 2008 година в КЦМ АД Пловдив (Динева 2008). Първите два показателя (съдържание на цинк и сяра) са „хубави“ и за тях са дадени долни граници за съдържанието им в шихтата. Следващите са неблагоприятни за производствения процес (тяхното наличие увеличава енергоемкостта или намалява добива) и за тях са дадени волни граници, които не бива да се превишават.

По такъв начин можем да съставим задача на линейното оптимизиране с целева функция  $L(\vec{x})$ , представляваща общата цена на шихтата и област от линейни ограничения включващи допустимите стойности на компонентите от таблицата.

$$L(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 100;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 3, 4, \dots, m;$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Тук  $x_j$  – % количество на  $j$ -тия концентрат в шихтата,  $c_j$  – цената на  $j$ -тия концентрат в шихтата,  $a_{ij}$  – съдържание на  $i$ -та съставка в  $j$ -ти концентрат,  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

По подразбиране долните граници за  $x_j$  са 0, а горните граници – 100. От технологични съображения (за изчерпване на налични застояли количества, недостиг на определена суровина или запазване на част от складовите наличности), долната и горна граници могат да приемат и други стойности в интервала  $[0, 100]$ .

Аналогични оптимизационни задачи могат да се запишат, като за целева функция се използва някой от редовете, съответстващи на „лошите“ ограничения (или тяхна линейна комбинация).

### Числени резултати

За следващите примери ще използваме условни цени, които поради фирмени съображения не съответстват на реалните.

$$\vec{c} = (0.01, 0.01, 0.05, 0.08, 0.002, 0.02, 0.01, 0.01, 0.02, 0.03, 0.02, 0.02, 0.012, 0.99, 1.08)$$

**Пример 1.** При така избран вектор на цените и долни и горни граници съответно 0 и 100, всеки от 15-те концентрата участва в шихтата съответно с количество:

$$\vec{x} = (0, 0.039345, 0, 0, 0.057688, 0, 0.817376, 0, 0.000967, 0, 0, 0, 0.084624, 0, 0),$$

т.е. в шихтата участват 3.9345% от Полша („Тржебьонка“), 5.7688% от Сърбия „Рудник“, 81.7376% от България „Льки“, 0.0967% от Перу „Искай Круз“ и 8.4624% от Турция „Акда“. Останалите концентрати не участват в шихтата съставена при дадените цени. Цената на така получената шихта е 0.009717.

**Пример 2.** Нека за същите цени от предишния пример е зададено и условието концентрат България „Льки“ да не участва с повече от 35% (няма повече в складова наличност или е „добър“ концентрат и не желаем да го изчерпваме напълно). Задаваме за съответния концентрат, горна граница 35. Резултатът е:

$$\vec{x} = (0.152942, 0.13908, 0, 0, 0.044216, 0, 0.35, 0.111567, 0.202195, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

В състава на шихтата участват 15.2942% от Македония „САСА 1“, 13.9079% от Полша („Тржебьонка“), 4.4216% от Сърбия „Рудник“, 35% от България „Льки“, 11.1567% от България „Златоград+Льки“, 20.2195% от Перу „Искай Круз“. Цената на шихтата се е увеличила и е станала 0.011668.

**Пример 3.** Нека към условията от горните примери бъде добавено и задължителното присъствие (изчерпване) на поне 10% от концентрата Македония „САСА 2“, т.е. долната граница на концентрата променяме на 10.

$$\vec{x} = (0.011369, 0.117014, 0, 0, 0.04488, 0.1, 0.35, 0.11024, 0.266497, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

В състава на шихтата участват 1.1369% от Македония „САСА1“, 11.7014% от Полша („Тржебьонка“), 4.4879% от Сърбия „Рудник“, 10% от Македония „САСА2“, 35% от България „Льки“, 11.024% от България „Златоград+Льки“ и 26.6497% от Перу „Искай Круз“, като цената е 0.013306.

### Усъвършенстване на модела. Приложение на дискретното оптимизиране

Полученото по-горе решение не е практически приложимо поради факта, че не могат да се добавят произволни количества от концентратите. Така например в решението на Пример 3. концентратът от България „Златоград+Льки“ участва с 11.024%, което отнасяйки към реалните условия не е приложимо. При съставянето на шихтата трябва участващите съставки да бъдат в части, пропорционални на обема на смесващото съоръжение.

	Македонија "САСА"1	Поша ("Гржебњо нка")	Турција "Батге 2"	Србија "Сребрени ца"	Србија "Рудник"	Македонија "САСА2"	България "Лазик"	Златгорад + Лазик	Перу "Искан Корг"	Турција	Турција "Горноско "	Турција "Конгур"	Турција "Аллаг"	Србија "Брегга" "	Германија "Касафра "		
Zn	<u>47.6</u>	63.9	<u>46.45</u>	<u>46.4</u>	<u>47.4</u>	<u>48.3</u>	<u>49.7</u>	<u>48.55</u>	53.75	<u>47.9</u>	53.8	<u>43.65</u>	58.1	<u>46.4</u>	<u>49.7</u>	>=	50
SrO <sub>2</sub>	31.35	33.1	32.5	31.75	32.8	30.15	31.6	31.4	32.2	33.05	32.35	34.55	31.75	33.7	33.9	>=	31
Cu	1.04	0.05	<u>2.06</u>	0.24	1.19	1.4	1.1	1.24	0.55	1.51	0.23	1.35	0.16	0.27	0.24	<=	1
Cl	<u>0.42</u>	<u>0.51</u>	0.23	0.28	<u>0.39</u>	<u>0.65</u>	0.29	0.25	<u>0.09</u>	0.25	0.28	0.15	0.24	<u>0.31</u>	0.28	<=	0.3
Co	0.011	0.001	0.036	0.001	0.013	0.011	0.006	<u>0.04</u>	0.002	<u>0.05</u>	0.006	0.001	<u>0.04</u>	0.002	0.001	<=	0.01
Ni	0.001	0.001	<u>0.003</u>	0.001	<u>0.005</u>	0.001	0.001	<u>0.003</u>	<u>0.001</u>	0.002	0.002	0.001	<u>0.003</u>	<u>0.005</u>	0.001	<=	0.0014
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.22	0.11	0.38	0.21	0.23	0.22	0.24	0.36	<u>0.14</u>	0	0.16	0.24	0.15	0.26	0.11	<=	0.5
Tl	0.0009	0.0021	0.0008	0.014	0.001	0.013	0	0	0.001	0.009	0.008	0.002	0.001	0.0014	0.0016	<=	0.005
Pb	1.5	1.97	<u>2.65</u>	<u>2.7</u>	0.67	2	1.84	<u>2.55</u>	0.36	<u>3.52</u>	<u>2.19</u>	0.36	1.77	1.53	0.9	<=	2.5
Fe	<u>10.55</u>	0.36	<u>9.75</u>	<u>12.49</u>	<u>14.32</u>	<u>10.15</u>	<u>8.2</u>	<u>8.15</u>	<u>9.05</u>	<u>9.05</u>	7.45	<u>13.3</u>	5.3	<u>11.95</u>	<u>11</u>	<=	8
SiO <sub>2</sub>	<u>2.6</u>	0.22	<u>3.3</u>	2.5	1.7	<u>2.7</u>	2.35	<u>5.65</u>	1.7	<u>3.2</u>	<u>3.25</u>	1.3	<u>3.2</u>	<u>2.6</u>	1.15	<=	2.3
Ge (g/t)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	5	5	5	<=	50
Sb	0.001	0.001	0.002	0.08	0.001	0.001	0.001	0.002	0.001	0.003	0.003	0.005	0.001	0.02	<u>0.013</u>	<=	0.002
As	0.01	0.01	0.05	0.08	0.002	0.02	0.01	0.01	0.02	0	0.02	0.02	0.012	<u>0.99</u>	<u>1.08</u>	<=	0.08
MgO	0.16	0.15	<u>0.07</u>	0.1	0.09	0	0.08	0.15	0.13	0	0.11	0.23	0.1	0.42	0.08	<=	0.3
CaO	<u>1.57</u>	0.23	0.43	0.15	0.46	0	0.34	<u>0.54</u>	0.14	0	0.38	<u>1.63</u>	<u>0.55</u>	<u>1.09</u>	0.27	<=	0.5
Cl	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	<=	0.02
F	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.013	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	<=	0.02

Фигура 1.

Реалната ситуация е една шихта да се състои от 20 единични дози (брой загребвания на подемната машина), т.е. всяка доза съответства на 5% от общото количество, като съдържанието на един концентрат не бива да надхвърля 35% от него. Затова разширяваме модела по следния начин: въвеждаме по три нови булеви променливи за всеки концентрат, които съответстват на 5, 10 и 20 процентното му участие (по аналогия със стотинките). Различните комбинации от тези променливи запълват стойностите в диапазона  $[0, 35]$ , които са кратни на 5 (виж таблица 1).

Таблица 1.

Брой загребвания	0	1	2	3	4	5	6	7
Количество (%)	0	5	10	15	20	25	30	35
Стойност на променлива $x_j^1$	0	1	0	1	0	1	0	1
Стойност на променлива $x_j^2$	0	0	1	1	0	0	1	1
Стойност на променлива $x_j^3$	0	0	0	0	1	1	1	1

Въвеждаме за  $j$ -ти концентрат три двоични променливи  $x_j^1, x_j^2, x_j^3 \in \{0,1\}$ , като имаме ограничително условие  $\sum_{j=1}^n 0.05x_j^1 + 0.1x_j^2 + 0.02x_j^3 = 1$  Долната граница за израза  $0.05x_j^1 + 0.1x_j^2 + 0.02x_j^3$  е 0, а горна граница 0.35, понеже имаме поставено условие, даден концентрат да не надхвърля 35% в шитата. От технологични съображения, долната и горна граници могат да приемат и други стойности. Нека положим  $f_j = 0.05x_j^1 + 0.1x_j^2 + 0.02x_j^3$  Така ще формулираме новата задача за шихтоване с минимална цена, като задача на целочисленото (двоично) оптимизиране:

$$L(\vec{f}) = \sum_{j=1}^n c_j f_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n f_j = 1;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \geq b_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j \leq b_i, \quad i = 3, 4, \dots, m;$$

$$l_j \leq f_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$f_j = 0.05x_j^1 + 0.1x_j^2 + 0.02x_j^3$$

## Числени резултати

За следващите примери отново ще използваме условните цени, както в примерите от предходната глава за линеен оптимизационен модел на шихтоване.

**Пример 1.** Ако не променяме допустимите граници за участие (т.е. остават съответно 0 и 35%), съставът на шихтата е 10% от Македония „САСА 1”, 15% от Полша („Тржебьонка”), 5% от Сърбия „Рудник”, 35% от България „Лъки”, 10% от „Златоград + Лъки”, 25% от Перу „Искай Круз”. Останалите концентрати не участват в шихтата. Цената на шихтата е **0.0121**. В сравнение с цената от първият пример в който се прилага линейното оптимизиране – **0.009717**, получаваме по-висока цена, понеже сме наложили допълнителни условия за целочисленост (целевата функция в линейния случай е граница за дискретния, която не винаги е достижима), но е по-близко до реалната ситуация.

**Пример 2.** Задаваме и условието концентратът България „Лъки” да не участва с повече от 25%. Горната граница на този концентрат, приема стойност 25. Резултатът е: 15% от Македония „САСА 1”, 20% от Полша („Тржебьонка”), 25% от България „Лъки”, 15% от България „Златоград+Лъки”, 25% от Перу „Искай Круз”. Останалите концентрати не участват. Цената на шихтата е **0.0125**.

**Пример 3.** Нека към условията от горните примери добавим и задължителното условие в състава на шихтата да участва поне с 10% концентрата Македония „САСА 2”, т.е. долната граница на този концентрат променяме на 10%. Получената шихта има следния състав: 5% от Македония „САСА1”, 15% от Полша („Тржебьонка”), 5% от Сърбия „Рудник”, 10% от Македония „САСА2”, 20% от България „Лъки”, 10% от България „Златоград+Лъки” и 35% от Перу „Искай Круз”. Цената е **0.0141**.

## Заклучение и изводи

Предлаганата методика позволява съставяне на оптимална шихтова композиция, съобразена наличните ресурси. Освен цена, като целева функция могат да се използват и други показатели (минимизиране на неблагоприятни съставки или максимално съдържание на цинк), като в този случай естествено се налагат ограничителни условия, свързани с цената на крайния продукт. Полученото решение в линейния случай е ориентировъчно, а в дискретния – реализуемо в производствени условия и може да се приложи на практика.

## Литература

**Боянов, Б., Сандалски, М., Сотиров, А., Георгиев, П.** Приложение на WEB-базирана експертна система при производството на цинк. // *Научна сесия на СУБ Пловдив, 11-12 ноември 2010*

**Динева, С.** Изследване пърженето на сулфидни цинкови концентрати и продуктите от пърженето и извличането. // *Дипломна работа от Химическия факултет на Пловдивския Университет, 2008*

<http://www.fmi.uni-sofia.bg/lecturers/vois/zlateva/mypapers/ormain.pdf> , 2012.

[http://www.stanford.edu/~ashishg/msande111/notes/excel\\_solver.pdf](http://www.stanford.edu/~ashishg/msande111/notes/excel_solver.pdf), 2012

<http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T2/T2.htm>, 2012